

Comportement homogénéisé de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux viscoélastique linéaire

Alain Jean de Dieu RAVOLANIRINA^{1*}, Adolphe RATIARISON¹, Nasandratra Jean Jaurès RATSIMBAZAFIHARIVOLA², Tsiriniana Martin Antoine RAFANOMEZANTSOA¹ et Alain Patrick VELONJARA¹

¹ *Université d'Antananarivo, Faculté des sciences, Laboratoire de la Dynamique de l'Atmosphère, du Climat et des Océans (DyACO), Madagascar*

² *Université d'Antananarivo, Faculté des sciences, Institut de la Maîtrise de l'Énergie (IME), Madagascar*

* Correspondance, courriel : ravolafenosoa@gmail.com

Résumé

Cette étude a pour but de modéliser la propagation du son dans un milieu poreux viscoélastique. La méthode d'homogénéisation d'une structure périodique basée sur le changement d'échelle a été utilisée pour prédire les propriétés macroscopiques du matériau à partir de sa microstructure et des propriétés des constituants à l'échelle microscopique. Ensuite, la modélisation conduit à l'obtention des problèmes de cellule ; ce qui permet de calculer les grandeurs effectifs correspondant : aux équations de Stokes, à la température sur le domaine fluide et à la viscoélasticité linéaire sur le domaine solide. Ces coefficients sont nécessaires pour la résolution du modèle macroscopique. Des résultats numériques pour un milieu isotrope viennent ensuite illustrer le travail.

Mots-clés : *ondes acoustiques, milieu poreux, homogénéisation, viscoélastique.*

Abstract

Homogenized behavior of the propagation of acoustic waves in a linear viscoelastic porous medium

The purpose of this study is to model the propagation of sound in a viscoelastic porous medium. The method of homogenization of a periodic structure based on scaling has been used to predict the macroscopic properties of the material from its microstructure and the microscopic properties of the constituents. Then modeling leads to cell problems; Which makes it possible to calculate the effective quantities corresponding to : the Stokes equations, the temperature on the fluid domain and the linear viscoelasticity on the solid domain. These coefficients are necessary for the resolution of the macroscopic model. Numerical results for an isotropic medium then illustrate the work.

Keywords : *acoustic wave, porous medium, homogenization, viscoelastic.*

Nomenclature

ε	<i>petit paramètre représentatif de l'échelle microscopique</i>
f	<i>fluide</i>
s	<i>solide</i>
t	<i>température</i>
i, j, k, l	<i>indice sur la dimension de l'espace</i>
ρ_0	<i>masse volumique du milieu, kg.m^3</i>
ρ_s	<i>masse volumique du solide du milieu, kg.m^3</i>
η_1	<i>première viscosité cinématique du fluide, Pa.s</i>
η_2	<i>deuxième viscosité cinématique du fluide, Pa.s</i>
η_s	<i>amortissement structural du matériau,</i>
λ, μ	<i>coefficients de Lamés, Pa</i>
K_d	<i>conductivité thermique, $\text{w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$</i>
C_p	<i>chaleur massique à pression constante, $\text{J.kg}^{-1}.\text{k}^{-1}$</i>
ϕ	<i>porosité du milieu</i>
ω	<i>fréquence, s^{-1}</i>
v_f	<i>vitesse du fluide, m.s^{-1}</i>
u_s	<i>déplacement du solide, m</i>
u_f	<i>déplacement du fluide, m</i>
p	<i>pression du fluide, N/m^2</i>
P_0	<i>pression atmosphérique, Pa</i>
T_0	<i>température de l'air, K</i>
k_{ij}	<i>conductivité hydraulique, m^2</i>
k'_{ij}	<i>conductivité thermique, $\text{w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$</i>
\vec{n}	<i>vecteur unitaire normale</i>
ψ_{ijkl}	<i>fonction de relaxation</i>
$\varepsilon(v_f)$	<i>tenseur de déformation de vitesse du fluide</i>
$\varepsilon(u_s)$	<i>tenseur de déformation du solide</i>
N_{Pr}	<i>nombre de Prandtl</i>
*	<i>produit de convolution</i>
x	<i>variable macroscopique</i>
y	<i>variable microscopique</i>
Ω_f	<i>domaine fluide</i>
Ω_s	<i>domaine solide</i>
$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$	<i>domaine biphasique</i>

1. Introduction

Cet article se place dans le cadre de recherches, actuellement en plein essor, sur la réduction du bruit des aéronefs. En effet, les nuisances sonores préoccupent de plus en plus les riverains des aéroports et des bases

militaires. Cette situation pousse les élus locaux à exiger toujours plus d'efforts de la part des acteurs de l'aéronautique, et notamment des constructeurs [1]. Afin de parvenir à la réduction du bruit, il devrait être partiellement absorbé in situ en développant des matériaux capables de le faire [2, 3]. Cette diminution du bruit se manifeste par la dissipation de l'énergie acoustique de l'onde en la faisant pénétrer dans le matériau, en se basant notamment sur la viscosité de l'air [4, 6]. Ainsi, le but de ce travail est d'établir la loi de comportement macroscopique de la propagation du son dans un milieu poreux viscoélastique.

2. Méthodologie

2-1. Homogénéisation des structures périodiques

La méthode de changement d'échelle a pour objectif de déterminer les propriétés macroscopiques du système à partir de la description microscopique de la structure poreuse à l'aide d'un volume élémentaire représentatif (v.e.r.). La taille caractéristique d'un v.e.r. doit donc être suffisamment grande pour contenir statistiquement toutes les informations géométriques du milieu. Mais elle doit être également suffisamment petite pour permettre une modélisation continue du milieu. L'homogénéisation par développement asymptotique à double échelle se fonde sur l'hypothèse de la séparation des échelles imposée par la condition.

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1$$

où, l est la longueur caractéristique microscopique et L est la longueur caractéristique macroscopique.

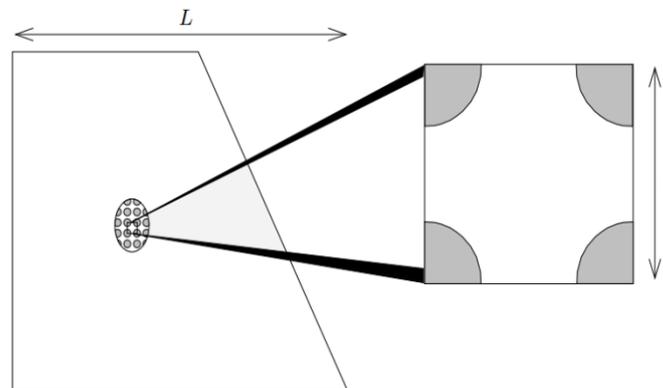


Figure 1 : Un matériau hétérogène. Point de vue macroscopique à gauche et point de vue microscopique [5]

2-2. Formulation du problème

2-2-1. Description à l'échelle microscopique

Les **Équations** correspondant au milieu poreux viscoélastique au niveau des pores sont décrites par les équations de Navier-Stokes dans le fluide et la viscoélasticité linéaire dans le solide.

- Équations dans le fluide

Les **Équations** pris en compte sont : l'équation d'état, puis les équations du fluide en déplacement et en température.

$$\frac{p}{\rho_0 T_0} = C_p - C_v \quad (1)$$

$$\text{Où : } \frac{p}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\tau}{T_0} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial v_f}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_f \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v_f = 0 \\ \rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_t \end{array} \right. \text{ dans } \Omega_f \quad (3)$$

- Équation dans le solide

Pour la partie solide, il y a l'équation de conservation du solide.

$$\rho_s \frac{\partial u_s}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_s \text{ dans } \Omega_s \quad (4)$$

- Condition d'adhérence sur l'interface fluide-solide

$$\left\{ \begin{array}{l} v_f = \frac{\partial u_s}{\partial t} \\ \sigma_f(v_f, p) \cdot \vec{n} = \sigma_s(u_s, p) \cdot \vec{n} \\ \tau = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma \quad (5)$$

avec, $\sigma_f(v_f, p) = -pId + \eta_1 \nabla \cdot v_f Id + \eta_2 e(v_f)$, $\sigma_s(x, t) = \psi_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl}(x, t)$ et $\sigma_t(T) = K_d \nabla T$

2-2-2. Problème local après linéarisation

Une perturbation harmonique ($e^{j\omega t}$) de petite amplitude de l'état d'équilibre thermodynamique ambiant est considéré. Elle est liée au passage de l'onde sonore dans l'équation fluide-structure.

$$v_f = \hat{v} e^{j\omega t} + v_s, u_s = \hat{u} e^{j\omega t} + u_s, p = \hat{p} e^{j\omega t} + p_s \text{ et } T = \hat{\tau} e^{j\omega t} + T_s \quad (6)$$

Alors les relations (3), (4) et (5) se réduisent à (7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_0 \omega^2 u_f = -\nabla p + j\omega [(\eta_1 + \eta_2) \nabla (\nabla \cdot u_f) + \eta_2 \Delta u_f] \\ \frac{\rho}{\rho_0} + \nabla \cdot u_f = 0 \\ j\omega \rho_0 C_p \tau = j\omega p + K_d \Delta \tau \\ -\rho_s \omega^2 u_s = \nabla \cdot (j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl}) \\ u_f = u_s \\ \{-pId + j\omega [\eta_1 \nabla \cdot u_f + \eta_2 e(u_f)]\} \cdot \vec{n} = (j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl}) \cdot \vec{n} \\ \tau = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

2-3. Normalisation

2-3-1. Évaluation des nombres adimensionnels

Trois nombre adimensionnels se dégagent des *Équations (3) et (4)*.

- Le nombre de Reynolds R_t :

Le nombre de Reynolds transitoire est défini par :

$$R_t = \frac{\left| \rho_0 \frac{\partial v_f}{\partial t} \right|}{\left| \eta_2 \Delta v_f \right|} \tag{8}$$

Le nombre de Reynolds transitoire local peut prendre deux expressions : les *Équations (11) et (12)*.

$$R_{tl} = \frac{\rho_0 \omega l^2}{\eta_2} = \left(\frac{1}{\lambda_b} \right)^2 \tag{9a}$$

avec, $\lambda_b = \sqrt{\eta_2 / \omega \rho_0}$ (9b)

La longueur λ_b caractérise la couche limite visqueuse. Nous admettons que le nombre de Reynolds transitoire local est $R_{tl} = O(1)$. R_{tl} peut aussi prendre l'expression (10) ;

$$R_{tl} = (\omega \tau_d)^2 \tag{10a}$$

avec, $\tau_d = l \sqrt{\rho_0 / \omega \eta_2}$ (10b)

τ_d est le temps mis par l'onde diffusive de cisaillement pour traverser la cellule périodique. Ainsi en prenant $R_{tl} = O(1)$, il est supposé que τ_d est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de la vibration.

- Le nombre adimensionnel Q :

Il est défini par :

$$Q = \frac{\left| \nabla p \right|}{\left| \eta_2 \Delta v_f \right|} \tag{11}$$

Quand l'écoulement est lent, le terme gradient macroscopique de pression, qui force l'écoulement, est du même ordre de grandeur que le terme de dissipation visqueuse locale. Alors :

$$\frac{p/L}{\eta_2 v_f / l^2} = O(1)$$

Ainsi il vient l'estimation (15) des nombres Q_l et Q_L :

$$Q_l = \frac{pl}{\eta_2 v_f / l} = O(\varepsilon^{-1}) \quad (12a)$$

$$\text{soit } Q_L = \frac{p/L}{\eta_2 v_f / L^2} = O(\varepsilon^{-2}) \quad (13b)$$

- Le nombre adimensionnel T_{sl} :

$$T_{sl} = \left| \frac{\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}}{\nabla \sigma_s} \right| \quad (14)$$

Le nombre sans dimension T_{sl} prend aussi deux expressions : les **Équations (15a) et (16a)**.

$$T_{sl} = (1/\lambda_s)^2 \quad (15a)$$

$$\text{avec, } \lambda_s = \sqrt{|\psi| / \rho_s} \quad (15b)$$

λ_s est la longueur caractéristique qui constitue l'élasticité du matériau.

$$T_{sl} = (\omega \tau_s)^2 \quad (16a)$$

$$\text{avec, } \tau_s = l \sqrt{\rho_s / |\psi|} \quad (16b)$$

τ_s est le temps mis par l'onde diffusive de cisaillement pour traverser la cellule périodique. Ainsi pour $T_{sl} > O(\varepsilon^2)$ le phénomène peut être homogénéisé et si $T_{sl} < O(\varepsilon^2)$ le problème devient quasi-statique.

- Le nombre adimensionnel T_{tl} :

$$T_{tl} = \left| \frac{\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t}}{K_d \Delta T} \right| \quad (17)$$

Le nombre adimensionnel T_{tl} a pour expression :

$$T_{tl} = \frac{\rho_0 C_p \omega}{K_d l^2} = O(\varepsilon^{-2}) \quad (18)$$

Elle doit se faire de telle sorte qu'au niveau macroscopique, les estimations (13a), (13b), (14) et (18) soient satisfaites. Ce qui suit est alors la normalisation du système (7) qui formellement s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_0 \omega^2 u_f = -\nabla p + \varepsilon^2 j \omega \left[(\eta_1 + \eta_2) \nabla (\nabla \cdot u_f) + \eta_2 \Delta u_f \right] \\ \left[\frac{p^0}{P_0} - \frac{\tau^0}{T_0} \right] + \nabla \cdot u_f = 0 \\ j \omega \rho_0 C_p \tau = j \omega p + \varepsilon^2 K_d \Delta \tau \\ -\rho_s \omega^2 u_s = \nabla \cdot (j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl}) \\ u_f = u_s \\ \left\{ -p Id + j \omega \left[\eta_1 \nabla \cdot u_f + \varepsilon^2 \eta_2 e(u_f) \right] \right\} \bar{n} = (j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl}) \bar{n} \\ \tau = 0 \end{array} \right. \quad (19a)$$

En posant $u = u_f - u_s$ le déplacement relative, le système en déplacement u et p vérifie le système fluide-structure suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_0 \omega^2 (u + u_s) = -\nabla p + \varepsilon^2 j \omega \left[(\eta_2 + \eta_1) \nabla (\nabla \cdot (u + u_s)) + \eta_2 \Delta (u + u_s) \right] \\ \left[\frac{p^0}{P_0} - \frac{\tau^0}{T_0} \right] + \nabla \cdot (u + u_s) = 0 \\ i \omega \rho_0 C_p \tau = i \omega p + \varepsilon^2 K_d \Delta \tau \\ -\rho_s \omega^2 u_s = \nabla \cdot (j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl}) \\ u = 0 \\ \left\{ -p Id + i \omega \varepsilon^2 \left\{ \eta_1 \nabla [\nabla \cdot (u + u_s)] + \eta_2 \varepsilon (u + u_s) \right\} \right\} \bar{n} = (j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl}) \bar{n} \end{array} \right. \quad (19b)$$

2-4. Application de la méthode d'homogénéisation à structure périodique dans l'équation fluide-structure

Les **Équations** donnant la description locale s'obtiennent en introduisant dans le système (19b) les développements asymptotiques (20) pour les inconnues u_f, u_s, p et τ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_f(x, y) = u_f^{(0)}(x, y) + \varepsilon u_f^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u_f^{(2)}(x, y) + \dots \\ u_s(x, y) = u_s^{(0)}(x, y) + \varepsilon u_s^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(x, y) + \dots \\ p(x, y) = p^{(0)}(x, y) + \varepsilon p^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, y) + \dots \\ \tau(x, y) = \tau^{(0)}(x, y) + \varepsilon \tau^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 \tau^{(2)}(x, y) + \dots \end{array} \right. \quad (20)$$

où, $u_f^{(i)}, u_s^{(i)}, p^{(i)}$ et $\tau^{(i)}, i = 0, 1, \dots$ sont Ω -périodiques.

En identifiant ensuite les termes des puissances de ε , et sachant que, du fait de la double échelle, l'opérateur dérivée s'écrit :

$$\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y, \nabla_y \cdot = \nabla_x \cdot + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \text{ et } \Delta = \Delta_x + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_{xy} + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y \quad (21)$$

On a successivement en identifiant les termes de même ordre :

$$E = \left\{ \begin{array}{l} u, \text{ fonctions vectorielles des variables reelles} \\ \text{\AA valeurs complexes definies dans } \Omega_f \text{ telles que :} \\ \nabla_y \cdot u = 0 ; u = 0 \text{ sur } \Gamma ; \text{ et } \Omega - \text{periodiques} \end{array} \right\}$$

L'espace E est un espace de Hilbert, s'il est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_E = \int_{\Omega_f} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial y_j} d\Omega + \int_{\Omega_f} u_i \bar{v}_i d\Omega$$

où, \bar{v}_i désigne le complexe conjuguée de v

La multiplication de (24a) par $\bar{w} \in E$ suivi d'une intégration sur Ω_f , il vient :

$$\rho_0 \omega^2 \int_{\Omega_f} u^0 \bar{w} d\Omega - j\omega \eta_2 \int_{\Omega_f} \Delta_y u^0 \bar{w} d\Omega - \int_{\Omega_f} p^1 \bar{w} d\Omega = - \int_{\Omega_f} [\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0] \bar{w} d\Omega$$

Le problème variationnel donnant u^0 consiste alors à trouver $u^0 \in E$ telle que :

$$\underbrace{\rho_0 \omega^2 \int_{\Omega_f} u^0 \bar{w} d\Omega - j\omega \eta_2 \int_{\Omega_f} \nabla_y u^0 \nabla_y \bar{w} d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega_f} [\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0] \bar{w} d\Omega}_{L(u)} \tag{27}$$

quelque soit $w \in E$

Sachant que la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ est coercive, et que $L(u)$ est une forme linéaire continue sur E' , dual de E , l'existence et l'unicité de la solution u^0 du problème variationnel (27) découlent du théorème de Lax-Milgram. La linéarité de (27) par rapport à $(\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0)$ entraine en outre que la solution u^0 peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} j\omega \eta_2 u^0 = -k(x, y, \omega) [\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0] \\ p^1 = -a(x, y, \omega) [\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0] + \tilde{p}^1(x) \end{cases} \tag{28}$$

où, le tenseur $k_{ij}(x, y, \omega)$ et les vecteurs $a_i(x, y)$ sont les solutions des problèmes de cellule (29) donnés par :

$$\begin{cases} -\frac{j\omega \rho_0}{\eta_2} k + \Delta_y k - \nabla_y a = Id \\ \nabla_y \cdot k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \tag{29}$$

2-4-2. Étude équation fluide en température

L'application du même raisonnement que précédemment dans la relation (24c) donne :

$$\rho_0 j\omega \int_{\Omega_f} \tau^0 \bar{w} d\Omega - K_a \int_{\Omega_f} \Delta_y \tau^0 \bar{w} d\Omega = j\omega \int_{\Omega_f} p^0 \bar{w} d\Omega \tag{30}$$

Le problème variationnel donnant τ^0 est alors de trouver $\tau^0 \in E$ telle que :

$$\rho_0 j \omega \int_{\Omega_f} \tau^0 \bar{w} d\Omega + K_d \int_{\Omega_f} \nabla_y \tau^0 \nabla_y \bar{w} d\Omega = j \omega \int_{\Omega_f} p^0 \bar{w} d\Omega \quad (31)$$

L'existence et l'unicité de la solution τ^0 du problème variationnel (31) découlent du théorème de Lax-Milgram. La linéarité de (31) par rapport à p^0 entraîne en outre que la solution τ^0 peut être écrite sous la forme :

$$\tau^0(x, y) = - \frac{k'(y, \omega)}{K_d} j \omega p^0(x) \quad (32)$$

Le tenseur $k'(x, y, \omega)$ est la solution de problème de cellule (33) donnés par :

$$\begin{cases} \frac{\rho_0 N_{Pr}}{\eta_2} j \omega \rho_0 k' - \Delta_y k' = 1 \\ k' = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Ce tenseur est Ω -périodique

2-4-3. Étude de l'équation solide

A l'ordre ε^{-2} , il y a :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \sigma_s^{-1} = 0 \\ \left\{ \sigma_s^{-1} \right\} n = 0 \end{cases} \quad (34)$$

$$\text{avec, } \sigma_s^{-1} = j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(u_s^0)$$

A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \sigma_s^{-1} + \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = 0 \\ \left(\sigma_s^{-1} \right) n = 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\text{avec, } \sigma_s^0 = j \omega \psi_{ijkl} * \left[\varepsilon_x(u_s^0) + \varepsilon_y(u_s^1) \right]$$

Multiplier (35a) par $w \in E$, et l'intégré sur Ω_s conduit à l'expression :

$$\int_{\Omega_s} \nabla_y \cdot \sigma_s^0 w d\Omega = \int_{\partial\Omega_s} \sigma_s^0 \cdot n w d\Gamma - \int_{\Omega_s} \sigma_s^0 \nabla_y w d\Omega = 0$$

En tenant compte de la condition aux limites : $\{-p^0 Id\} n = \{\sigma_s^0\} n$

$$\int_{\Omega_s} \left[j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(u_s^1) \right] \nabla_y w d\Omega = - \int_{\Omega_s} \left[j \omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) \right] \nabla_y w d\Omega - \int_{\Omega_s} p^0 \nabla_y \cdot w Id d\Omega$$

Par linéarité :

$$u_s^1(x, y) = \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) \right] + \kappa p^0 + \bar{u}_s^{-1}(x) \tag{36}$$

A l'ordre ε^0 :

$$\begin{cases} -\rho_s \omega^2 u_s^0 = \nabla_x \cdot \sigma_s^0 + \nabla_y \cdot \sigma_s^1 \\ \left\{ -p^1 Id + j\omega \left[\eta_1 \nabla_y \cdot u_f^0 + \eta_2 \varepsilon_y(u_f^0) \right] \right\} \bar{n} = (\sigma_s^1) \bar{n} \end{cases} \tag{37}$$

avec, $\sigma_s^1 = j\omega \psi_{ijkl} * \left[\varepsilon_x(u_s^1) + \varepsilon_y(u_s^2) \right]$

Le vecteur κ et le tenseur ζ sont les solutions particulières de (38) :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = \nabla_y \cdot \left\{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + \kappa p^0 \right] \right\} \right\} = 0 \\ \left\{ -p^0 Id \right\} \bar{n} = \left\{ \sigma_s^0 \right\} n = j\omega \left\{ \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + \kappa p^0 \right] \right\} \right\} \bar{n} \end{cases} \tag{38}$$

Alors, il advient que :

$$\sigma_s^0 = j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(\kappa p^0) + \underbrace{j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) \right] \right\}}_{\tilde{\sigma}_s^0}$$

Posons : $\tilde{\sigma}_s^0 = j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) \right] \right\}$

A partir de la valeur de p^0 et de $\varepsilon_x(u_s^0)$, il y a deux possibilités :

1^{er} cas $p^0 = 1$ et $\varepsilon_x(u_s^0) = 0$

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = \nabla_y \cdot \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(\kappa) \right] = 0 \\ \left\{ -Id \right\} \bar{n} = j\omega \left\{ \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(\kappa) \right\} \bar{n} \end{cases} \tag{39}$$

En multipliant (39) par $\bar{w} \in E$, et l'en intégrant sur Ω_s , il vient :

$$\int_{\Omega_s} \left[Id - (j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(\kappa)) \right] \nabla_y w d\Omega = 0$$

2^e cas $p^0 = 0$ et $\varepsilon_x(u_s^0) \neq 0$

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \tilde{\sigma}_s^0 = \nabla_y \cdot \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) \right] \right\} \right] = 0 \\ \left\{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x(u_s^0) \right] \right\} \right\} \bar{n} = 0 \end{cases} \tag{40}$$

D'où, l'expression de la contrainte solide est $\sigma_s^0 = \tilde{\sigma}_s^0 + (j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y(\kappa)) p^0$

La multiplication de (40) par $w \in E$ et son intégration sur Ω_s permet d'écrire :

$$\int_{\Omega_s} \left\{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \right] \right\} \right\} \nabla_y w d\Omega = - \int_{\Omega_s} \left\{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \right\} \nabla_y w d\Omega$$

Les inconnues κ et ζ sont données par la résolution des systèmes (39) et (40).

2-5. Description macroscopique

2-5-1. Perméabilité effective

D'après la relation (28a), le déplacement relatif u^0 est proportionnel au gradient de pression :

$$j\eta_2 u^0 = -k (\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0)$$

En outre, si la moyenne de k solution du système (29) par la relation (41) est notée :

$$K = \langle k \rangle = \frac{1}{|\Omega_f|} \int_{\Omega_f} k d\Omega \quad , \quad (41)$$

Après intégration de (27a) sur Ω_f , il vient :

$$\langle u^0 \rangle = \langle k \rangle (\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0) \quad (42)$$

(42) est une loi de Darcy généralisée à la dynamique des fluides incompressibles.

2-5-2. Modèle macroscopique équation fluide

- A l'ordre ε^0 :

$$\begin{cases} \rho_0 \omega^2 u^0 + j\omega \left[\eta_1 \nabla_y (\nabla_y \cdot u^0) + \eta_2 \Delta_y u^0 \right] - \nabla_y p^1 = \nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0 \\ \left[\begin{array}{c} p^0 \\ P_0 \end{array} - \begin{array}{c} \tau^0 \\ T_0 \end{array} \right] + \nabla_x \cdot u_f^0 + \nabla_y \cdot u_f^1 = 0 \\ u_f^0 = u_s^0 \end{cases}$$

- A l'ordre ε^1 : $u_f^1 = u_s^1$

$$\begin{cases} u_s^1(x, y) = \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \right] + \kappa p^0 + \bar{u}_s^{-1}(x) \\ \text{or : } \left\{ \begin{array}{l} \tau^0(x, y) = -\frac{j\omega k'}{K_d} p^0 \\ u_f^0 = u^0 + u_s^0 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\text{alors : } \left[\begin{array}{c} p^0 \\ P_0 \end{array} - \begin{array}{c} \tau^0 \\ T_0 \end{array} \right] + \nabla_x \cdot u^0 + \nabla_x \cdot u_s^0 = \nabla_y \cdot \left\{ \zeta \left[j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \right] \right\} - \nabla_y \cdot \kappa p^0 \quad (43)$$

L'Équation de continuité à l'échelle macroscopique est obtenue en moyennant (43) :

$$\nabla_x \cdot \langle u^0 \rangle + \left[\frac{\phi}{P_0} + \frac{j\omega}{T_0 K_d} \langle k' \rangle \right] p^0 = \beta p^0 + \{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \} \langle \nabla_y \cdot \zeta \rangle - \phi [j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0)] \quad (44)$$

avec, $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d\Omega$

2-5-3. Modèle macroscopique équation solide

Pour les équations de conservations :

A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \sigma_s^{-1} + \nabla_y \cdot \sigma_s^0 = 0 \\ (\sigma_s^{-1})_n = 0 \end{cases} \quad (45)$$

avec, $\tilde{\sigma}_s^0 = j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y \{ \zeta [j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0)] \}$

A l'ordre ε^0 :

$$-\rho_s \omega^2 u_s^0 = \nabla_x \cdot \sigma_s^0 + \nabla_y \cdot \sigma_s^1 \quad (46)$$

Par passage à la moyenne, cette équation (46) devient :

$$-\rho_s \omega^2 u_s^0 (1 - \phi) = \nabla_x \cdot \langle \sigma_s^0 \rangle \quad (47)$$

où, $\langle \sigma_s^0 \rangle = \langle \tilde{\sigma}_s^0 \rangle + \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_s} [j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y (\kappa)] d\Omega \right] p^0$

2-5-4. Modèles macroscopiques équations fluide-structure

Ainsi, les **Équations** obtenues pour l'échelle macroscopique sont regroupées dans (48).

$$\begin{cases} \langle \rho \rangle \omega^2 u_s^0 + \rho_0 \omega^2 \langle u^0 \rangle = -\nabla_x \cdot \langle \tilde{\sigma}_s^0 \rangle + \nabla_x \cdot \alpha p^0 \\ \nabla_x \cdot \langle u^0 \rangle + \left[\frac{\phi}{P_0} + \frac{j\omega}{T_0 K_d} \langle k' \rangle \right] p^0 = \beta p^0 + \{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \} \langle \nabla_y \cdot \zeta \rangle \\ - \phi [j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0)] \end{cases} \quad (48)$$

avec, $\langle \rho \rangle = \rho_s (1 - \phi) + \rho_0 \phi$;
 $\alpha = \phi Id - \langle j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y (\kappa) \rangle i$;
 $i \omega \eta_2 \langle u^0 \rangle = K_{eff} (\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0) ;$
 $\tilde{\sigma}_s^0 = \{ j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_x (u_s^0) \} [Id + j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_y (\zeta)] i$;
 $\beta = \langle \nabla_y \cdot \kappa \rangle .$

Le comportement macroscopique recherché est en outre décrit par le système (48).

2-6. Application dans un milieu poreux isotrope

La loi de comportement du solide est :

$$\sigma_s(u_s) = j\omega \psi_{ijkl} * \varepsilon_{kl} \quad (49)$$

Lorsque le milieu est isotrope, (49) se réduit à :

$$\sigma_s(u_s) = j\omega [\psi_1 * \text{tr}(\varepsilon(u_s)) Id + \psi_2 * \varepsilon(u_s)] \quad (50)$$

où, ψ_1 et ψ_2 sont les fonctions de relaxation

Paramètres utilisés :

$$\rho_0 = 1.03 * 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^3, \quad \eta_f = 0.96 * 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \rho_s = 211 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad C_p = 2267.95 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ K_d = 0.75 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad \eta_s = 0.15, \quad \nu = 0.33 \text{ et } E = 344 * 10^3 \text{ Pa}.$$

3. Résultats et discussion

3-1. Équation du fluide en déplacement

Les *Équations* correspondant à la partie fluide seront simulées dans le maillage de la *Figure 2*.

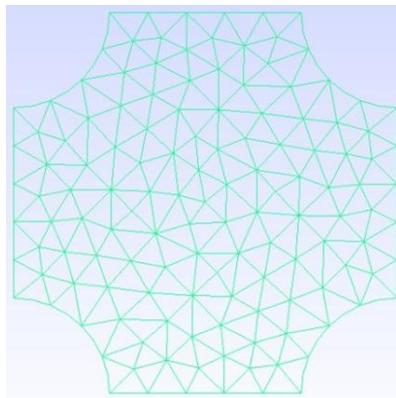


Figure 2 : Maillage de la partie fluide

En établissant un code de programmation en élément finis sur MATLAB, il vient les *Figures 5* jusqu'à *14*. Elles représentent la pression réelle, la pression imaginaire, le déplacement relatif réel et le déplacement relatif imaginaire quand la fréquence varie de $\omega = 20 \text{ Hz}$ à $\omega = 30 \text{ Hz}$ par pas de 5 Hz .

- *Résultat sur la pression (p^1)*

D'abord, concernant la pression réelle, il est remarqué qu'à l'entrée (*Figures 5, 9 et 13*), il y a une dépression au contact du solide. A la sortie, c'est le phénomène inverse qui se passe. Ce phénomène reste identique quel que soit la fréquence. Ensuite pour la pression imaginaire, elle est minimale à l'entrée et augmente au contact du solide (*Figures 6, 10 et 14*). Que ce soit à l'entrée ou à la sortie, ces phénomènes

se répètent.

- *Résultat sur le déplacement relatif (u^0)*

A propos du déplacement relatif réel, il est constaté que l'intensité du vecteur relatif diminue quand la fréquence augmente (*Figures 3, 7 et 11*). Et pour le déplacement relatif imaginaire, l'intensité du vecteur déplacement est presque inchangeable quand la fréquence augmente (*Figures 4, 8 et 12*).

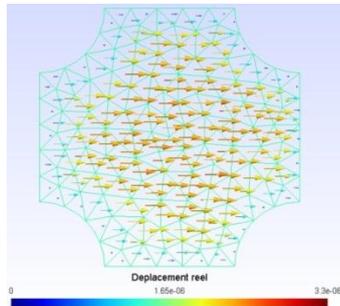


Figure 3 : *Déplacement relative réel de u^0 pour $\omega = 20 \text{ Hz}$*

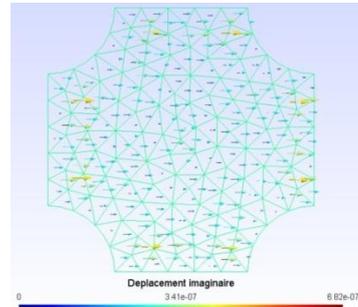


Figure 4 : *Déplacement relative imaginaire de u^0 pour $\omega = 20 \text{ Hz}$*

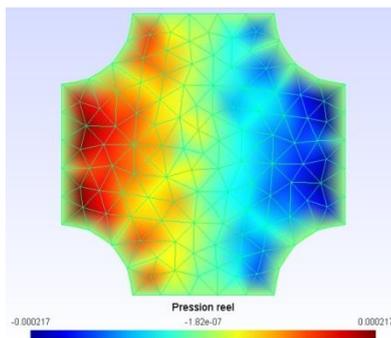


Figure 5 : *Pression réel de p^1 pour $\omega = 20 \text{ Hz}$*

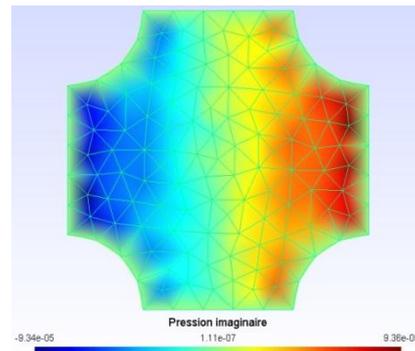


Figure 6 : *Pression imaginaire de p^1 pour $\omega = 20 \text{ Hz}$*

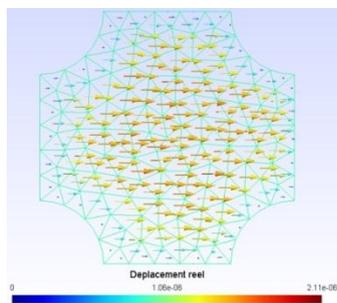


Figure 7 : *Déplacement relative réel de u^0 pour $\omega = 25 \text{ Hz}$*

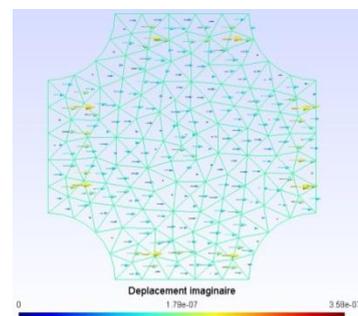


Figure 8 : *Déplacement relative imaginaire de u^0 pour $\omega = 25 \text{ Hz}$*

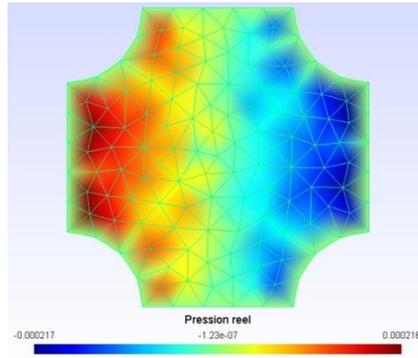


Figure 9 : Pression réel de p^1 pour $\omega = 25 \text{ Hz}$

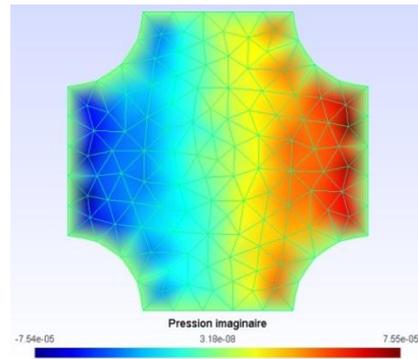


Figure 10 : Pression imaginaire de p^1 pour $\omega = 25 \text{ Hz}$

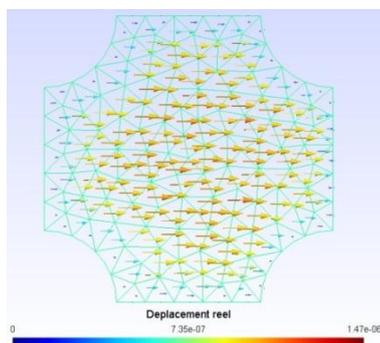


Figure 11 : Déplacement relative réel de u^0 pour $\omega = 30 \text{ Hz}$

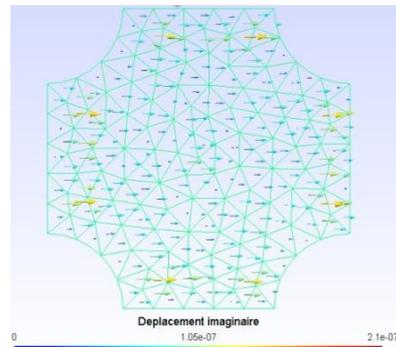


Figure 12 : Déplacement relative imaginaire de u^0 pour $\omega = 30 \text{ Hz}$

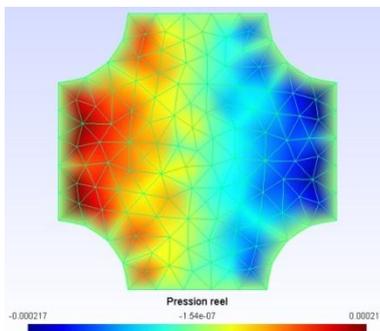


Figure 13 : Pression réel de p^1 pour $\omega = 30 \text{ Hz}$

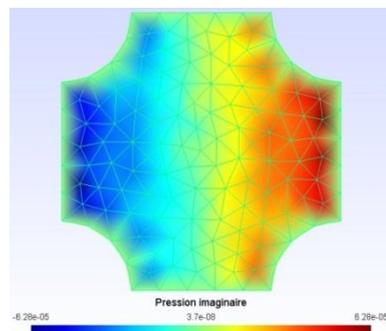


Figure 14 : Pression imaginaire de p^1 pour $\omega = 30 \text{ Hz}$

La simulation numérique de l'Équation (29) a permis d'obtenir le coefficient k . Et à partir de la définition de quantités moyennes sur le volume Ω , il vient la perméabilité effective $\langle k \rangle$. Les Figures 15 et 16 constituent les parties réelle et imaginaire de la perméabilité pour la porosité $\phi = 0,9$. Les deux figures montrent que la perméabilité effective décroît en fonction de la fréquence. La courbe décroît de 10^{-6} Darcy à 0 quand la fréquence croît de 0 Hz à 100 Hz. De la même façon, la partie imaginaire de la perméabilité décroît de $8 \cdot 10^{-8}$ à 0 quand la fréquence croît de 0 Hz à 100 Hz.

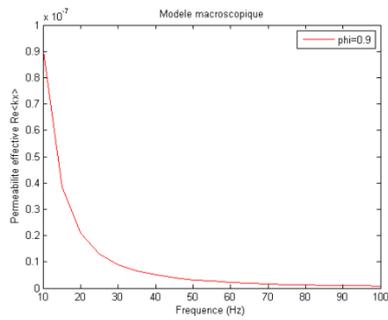


Figure 15 : Perméabilité effective réel de $\langle k \rangle$ pour $\phi = 0.9$

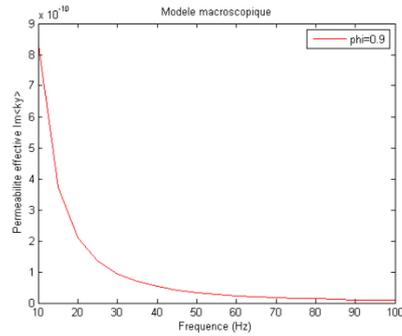


Figure 16 : Perméabilité effective imaginaire de $\langle k \rangle$ pour $\phi = 0.9$

Les Figures 17 et 18 montrent que le déplacement macroscopique $\langle u^0 \rangle$ diminue aussi lorsque la fréquence augmente.

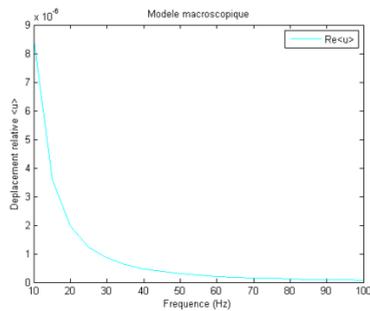


Figure 17 : Déplacement relative réel de $\langle u^0 \rangle$

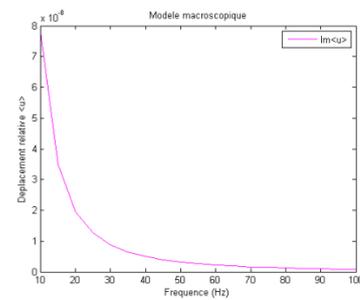
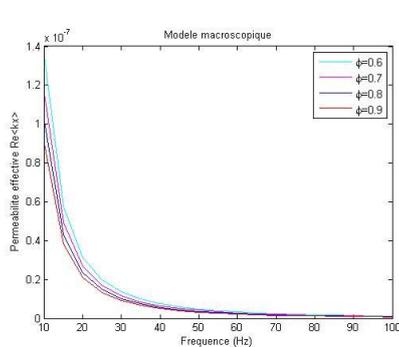
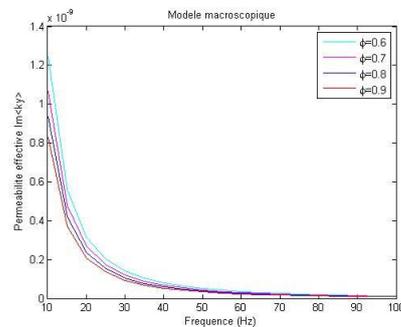


Figure 18 : Déplacement relative imaginaire de $\langle u^0 \rangle$

Toujours à partir de la relation (29), ϕ est varié par : $\phi = 0,6$; $\phi = 0,7$; $\phi = 0,8$ et $\phi = 0,9$. La Figure 19 montre le rôle de la porosité dans la propagation du son dans un milieu poreux, en augmentant le parcours moyen parcouru par l'onde acoustique. En effet lorsque la porosité augmente, le son circule beaucoup mieux.



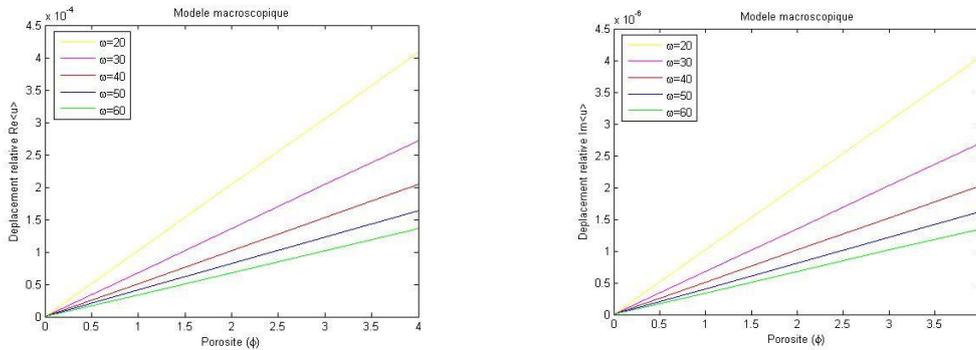
a) Partie réel de la perméabilité effective



b) Partie imaginaire de la perméabilité effective

Figure 19 : Perméabilité effective pour différentes valeurs de la porosité

La **Figure 20** est obtenue en affectant successivement à la fréquence de l'onde acoustique les valeurs : $\omega = 20 Hz$, $\omega = 30 Hz$, $\omega = 40 Hz$, $\omega = 50 Hz$ et $\omega = 60 Hz$. Elle montre qu'à propos du déplacement relatif il croit lorsque la porosité augmente car l'onde acoustique circule librement ; puis elle diminue lorsque la fréquence croit.



a) Partie réel du déplacement relative

b) Partie imaginaire du déplacement relative

Figure 20 : Déplacement relative pour différentes valeurs de la fréquence

Les **Figures 21 et 22** montrent que le déplacement est proportionnel au gradient de pression. C'est-à-dire, le gradient de pression augmente avec le déplacement et vice versa.

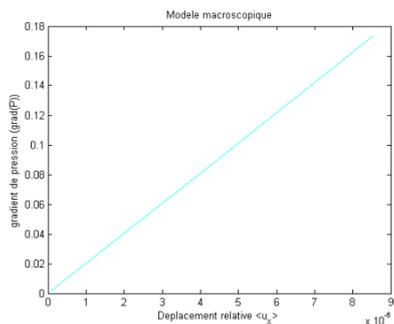


Figure 21 : Variation de la pression réel en fonction de $\langle u_x^0 \rangle$

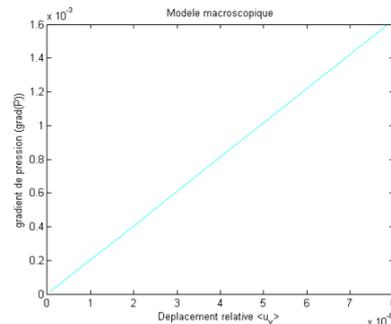
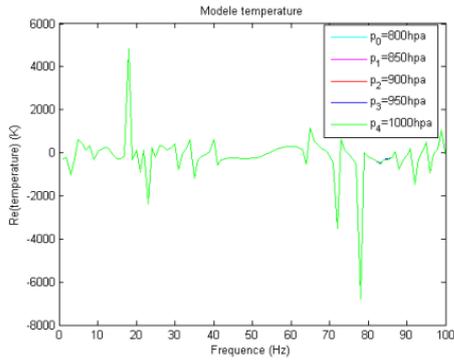


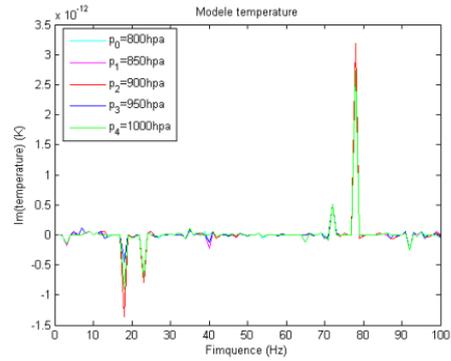
Figure 22 : Variation de la pression imaginaire en fonction de $\langle u_y^0 \rangle$

3-2. Équation fluide en température

En variant la pression macroscopique ($p^0 = 800 hpa$, $850 hpa$, $900 hpa$, $950 hpa$ et $1000 hpa$), il n'y a pas de différence palpable, les courbes sont presque confondues (**Figure 23**). Puis la température est maximale pour $\omega = 20 Hz$ et minimale pour $\omega = 80 Hz$ (**Figure 23a**) ; Mais c'est l'opposée dans la **Figure 23b**.



a) Partie réel de la température τ^0



b) Partie imaginaire de la température τ^0

Figure 23 : Température τ^0 pour différentes valeurs de la pression macroscopique p^0

Les **Figures 24 et 25** représentent l'influence de la porosité sur la température. Sa partie imaginaire augmente lorsque la porosité diminue ; tandis que c'est l'inverse pour la partie réel.

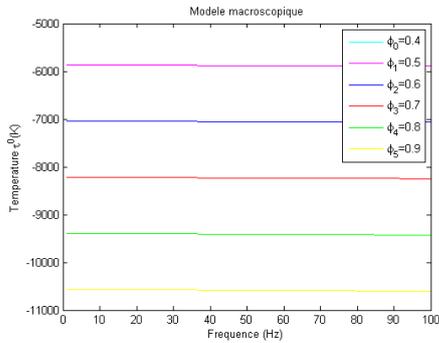


Figure 24 : Température réel de $\langle \tau^0 \rangle$ pour différentes valeurs de la porosité

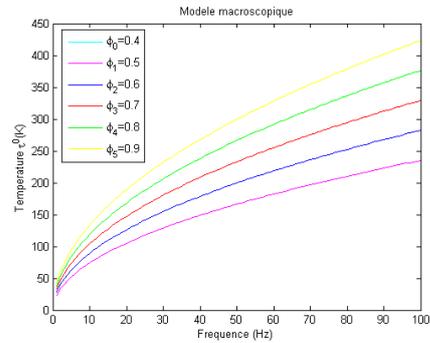


Figure 25 : Température imaginaire de $\langle \tau^0 \rangle$ pour différentes valeurs de la porosité

La **Figure 26** montre que pour différentes valeurs de la fréquence la température réelle diminue lorsque la porosité augmente. Et on remarque aussi que la fréquence n'influe pas sur la partie réelle de la température $\langle \tau^0 \rangle$. Tandis que sur la **Figure 27**, la température croit lorsque la fréquence augmente.

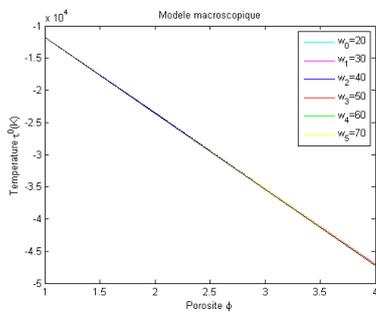


Figure 26 : Température réel de $\langle \tau^0 \rangle$ pour différentes valeurs de la fréquence

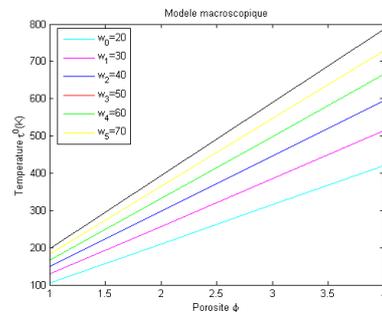


Figure 27 : Température imaginaire de $\langle \tau^0 \rangle$ pour différentes valeurs de la fréquence

3-3. Équation solide

Le maillage dans lequel les équations correspondant à la partie solide sont représentées par la **Figure 28**.

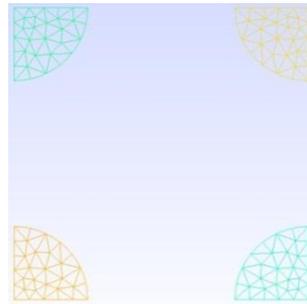


Figure 28 : Maillage de la partie solide

1^{er} cas : Le déplacement solide κ est induit par la pression ($p^0 = 1$ et $\varepsilon_x(u_s^0) = 0$)

Les **Figures 29 et 30** montrent que le déplacement solide κ se fait par une traction. Elle est maximum sur la surface et minimum à l'intérieur.

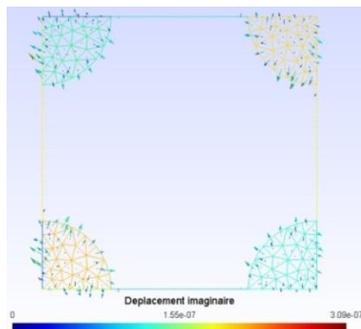


Figure 29 : Déplacement solide imaginaire de κ

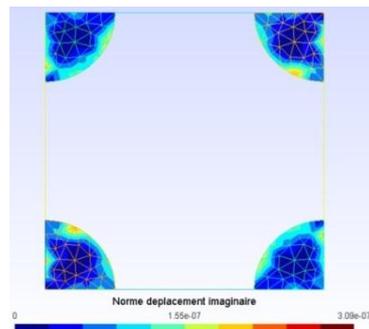


Figure 30 : Norme déplacement solide imaginaire de κ

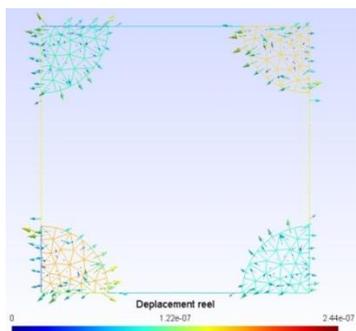


Figure 31 : Déplacement solide réel de κ

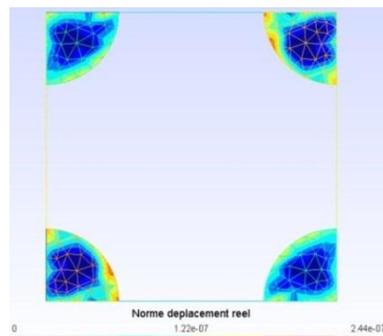


Figure 32 : Norme déplacement solide réel de κ

2^e cas : Le déplacement solide ζ est induit par la déformation macroscopique ($p^0 = 0$ et $\varepsilon_x(u_s^0) \neq 0$) Les **Figures 33 et 35** sont presque identiques au premier cas (**Figures 29 et 31**). Le déplacement solide ζ se fait par une traction. Elle est maximum sur la partie solide et minimum à l'intérieur.

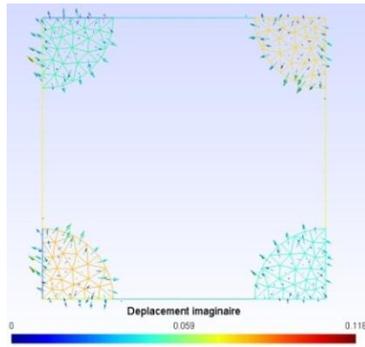


Figure 33 : *Déplacement solide imaginaire de ζ*

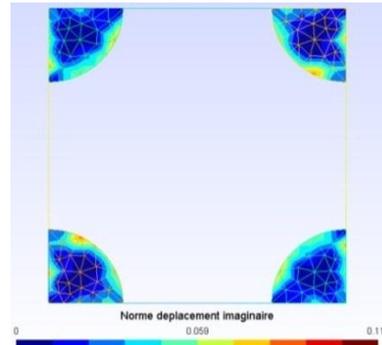


Figure 34 : *Norme déplacement solide imaginaire de ζ*

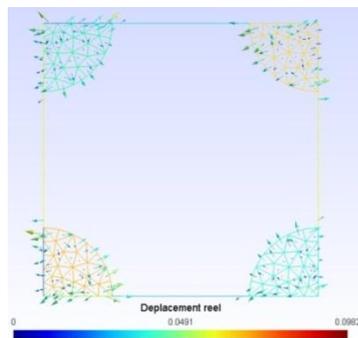


Figure 35 : *Déplacement solide réel de ζ*

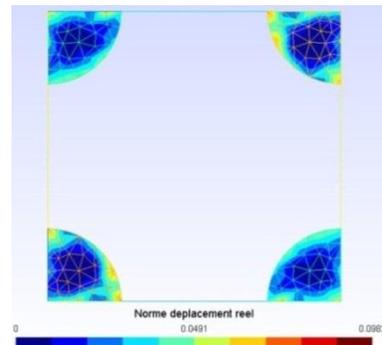


Figure 36 : *Norme déplacement solide réel de ζ*

4. Conclusion

Dans cet article nous avons établi un modèle pour décrire la propagation des ondes acoustiques dans un milieu hétérogène viscoélastique linéaire saturé par un fluide interstitiel. La déformation dans le milieu solide est décrite par une loi de comportement viscoélastique. La méthode d'homogénéisation a été utilisée pour déduire le comportement effectif, correspondant à un milieu homogène équivalent à l'échelle macroscopique. Afin de mettre en exergue l'isolation acoustique, il y avait la résolution numérique des problèmes microscopique qui a été effectuée en supposant que le milieu poreux pris en compte est isotrope. Puis, à propos de la simulation numérique, un code MATLAB basé sur la méthode des éléments finis de référence a été utilisé. Néanmoins, il est faisable d'augmenter la complexité de cette étude en prenant un milieu poreux anisotrope.

Références

- [1] - YACOUBOU SALISSOU, « Caractérisation des propriétés acoustiques des matériaux poreux à cellules ouvertes et à matrice rigide ou souple », (2009)
- [2] - STEPHANE GASSER, « Etude des propriétés acoustiques et mécanique d'un matériau métallique poreux. Modèle à base de sphère creuse de nickel », (2003)
- [3] - MINH TAN HOANG, « Modélisation et Simulation Multi-Echelle et Multi-Physique du Comportement Acoustique de Milieux Poro-Elastiques : Application aux Mousses de Faible Densité », (2012)

- [4] - NAVID NEMATI, « Macroscopic theory of sound propagation in rigid-framed porous materials allowing for spatial dispersion: Principle and validation », (2012)
- [5] - PIERRE TARDIF D'HAMONVILLE, « Modélisation et simulation du transport advectif et diffusif en milieu poreux monophasique et diphasique », (2003)
- [6] - SYLVAIN BERGER, « Contribution à la caractérisation des milieux poreux par des méthodes acoustiques : estimations des paramètres physiques », (2004)
- [7] - DENIS LAFARGE, « Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide visco-thermique : (définition de paramètres géométriques analogie électromagnétiques temps de relaxation) », (1993)
- [8] - AMELIE RENAULT, « Caractérisation mécanique dynamique de matériaux poro-viscoélastique », (2008)
- [9] - OLIVIER DOUTRES, « Caractérisation mécanique de matériaux fibreux en vibro-acoustique », (2007)
- [10] - CHARLES PEYREGA and DOMINIQUE JEULIN, « Estimation of acoustic properties and of the representative volume element of random fibrous media », *Journal of Applied Physics*, 113, 104901 (2013)
- [11] - A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, « Asymptotic Analysis for periodic structures », (1978)
- [12] - I. MALINOUSKAYA, « Propriétés acoustiques des milieux poreux secs et saturés », (2007)
- [13] - ADELIN AUGIER, « Modélisation et simulation numérique de matériaux microstructures pour l'isolation acoustique des cabines d'avion, (2011)
- [14] - JOSE M. CARCIONE, « Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium », (1988)
- [15] - RAFANOMEZANTSOA TSIRINIAINA MARTIN ANTOINE, « Modélisation mécanique du comportement viscoélastique d'un milieu poreux et transport sédimentaire dans ce milieu », (2017)
- [16] - NAVID NEMATI, ANSHUMAN KUMAR, DENIS LAFARGE, NICHOLAS X. FANG, « Non local description of sound propagation through an array of Helmholtz resonators », (2015)
- [17] - RUSTEM R. GADYL'SHIN, « On scattering frequencies in homogenization problems. Critical cases », *C. R. Mécanique*, 344 (2016) 181 - 189
- [18] - GILLES A. FRANCFORT, ANTOINE GLORIA, « Isotropy prohibits the loss of strong ellipticity through homogenization in linear elasticity », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 354 (2016) 1139 - 1144
- [19] - MOJTABA IZADMEHR, MAHDI ABBASI, MEHRSHAD MANSOURI, ALIREZA KAZEMI, ALI NAKHAEI, AMIN DARYASAFAR, « Accurate analytical model for determination of effective diffusion coefficient of polymer electrolyte fuel cells by designing compact Loschmidt cells », *Fuel*, 199 (2017) 551 - 561
- [20] - EDUARD ROHAN, SALAH NAILI, VU-HIEU NGUYEN, « Wave propagation in a strongly heterogeneous elastic porous medium : Homogenization of Biot medium with double porosities », *C. R. Mécanique*, 344 (2016) 569 - 581
- [21] - LUC JAOUEN FRANÇOIS-XAVIER BECOT, « Acoustique des milieux poreux : modèles et méthodes de caractérisation », (2009)
- [22] - ARNAUD MESGOUEZ, « Etude numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime impulsionnel », (2005)
- [23] - CHANG-YONG LEE and MICHAEL J. LEAMY, « Acoustic absorption calculation in irreducible porous media: A unified computational approach », *Acoustical Society of America*, (2009)
- [24] - ALAIN JEAN DE DIEU RAVOLANIRINA, « Modélisation et simulation numérique de la propagation du son dans un milieu poreux flexible », *Afrique SCIENCE*, 13 (3) (2017) 411 - 424
- [25] - CHANG-YONG LEE, MICHAEL J. LEAMY and JASON H. NADLER, « Numerical Calculation of Effective Density and Compressibility Tensors in Periodic Porous Media : A Multi-Scale Asymptotic Method », Excerpt from the Proceedings of the COMSOL Conference 2008 Boston