

Résolution numérique de l'équation de transport de colloïdes en milieu poreux par les modèles fractionnaires

AMBEONDAHY ^{1*}, Djaffard MAXWELL ¹, Geoslin RAKOTOVELO ², Zo REZIKY ¹,
Solonjanaka RAKOTONASY ¹ et Adolphe RATIARISON ¹

¹ *Laboratoire de la Dynamique de l'Atmosphère, du Climat et des Océans (DyACO), Faculté des Sciences, Université d'Antananarivo, Madagascar*

² *Institut Supérieur des Sciences et Technologies de Mahajanga, Université de Mahajanga, Bâtiment Ex-LOLO Mahajanga-be, Madagascar*

* Correspondance, courriel : ambeondahyp@gmail.com

Résumé

Dans ce travail, nous avons cherché la solution analytique et numérique de l'équation de transport des colloïdes en milieux poreux. Pour la méthode numérique, nous avons utilisé le calcul fractionnaire en transformant l'équation différentielle de transport classique en équation différentielle fractionnaire. Dans ce cas, il y a une apparition de deux paramètres α et β tels que $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < 2\beta \leq 2$. Nous avons calculé les paramètres α et β . La comparaison des résultats obtenus par la méthode numérique avec ceux de la solution analytique est enfin présentée et analysée.

Mots-clés : *intégrale fractionnaire, dérivée fractionnaire, transformée de Laplace, taux de biodégradation, temps de résidence moyen.*

Abstract

Numerical resolution of colloids transport equation in porous media by fractional models

In this work, we have sought the analytical and numerical solutions of the transport of colloids in porous media equation. For the numerical method, we have used the fractional calculus transforming the classic differential equation to fractional differential equation. In this case, there had been an appearance of both parameters α and β such as $0 < \alpha \leq 1$ et $1 < 2\beta \leq 2$. We have calculated these parameters α and β . The comparison of the results obtained by the numerical method with those of the analytical solution is finally presented and analyzed.

Keywords : *fractional integration, fractional derivative, Laplace transform, average residence time and biodegradation rate.*

1. Introduction

L'approche fractionnaire apparaît aujourd'hui, comme une voie prometteuse pour mieux décrire le transport de colloïdes en milieux complexes. Les travaux sur les approches fractionnaires sont très vastes et concernent des domaines très variés, en particulier les milieux poreux. La motivation de ce travail est le transport de colloïdes dans des milieux poreux, plus précisément dans le sol. L'**Equation** générale de diffusion [1] de transport en un milieu poreux est connue sous la forme de **l'Equation (1)**:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \frac{D_e}{R} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - \frac{v}{R} \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} - \lambda C(x,t) \quad (1)$$

Avec $C(x, t)$ est la concentration à la date t au point d'abscisse x ; D_e le coefficient de dispersion effective dans le milieu poreux saturé du polluant considéré; R le coefficient de retard dans le transfert du polluant considéré dans le milieu; v la vitesse d'écoulement de l'eau en milieu poreux (équation de Darcy) et λ le taux de biodégradation (dégradation du premier ordre). Si on écrit **l'équation (1)** en l'**Equation** différentielle fractionnaire [2], on a:

$$\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} = D_h \frac{\partial^{2\beta} C(x,t)}{\partial x^{2\beta}} - v_p \frac{\partial^\beta C(x,t)}{\partial x^\beta} - \lambda C(x,t) \quad (2)$$

$$D_h = \frac{D_e}{R} \text{ et } v_p = \frac{v}{R} \text{ et } 0 < \alpha \leq 1; \quad 1 < 2\beta \leq 2$$

L'objectif de ce travail est de déterminer les paramètres α et β de **l'Equation (2)** en utilisant la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire. Dans un premier temps, nous avons calculé le paramètre α pour $\beta = 1$. Ensuite, nous avons calculé β autre que $\beta = 1$ pour α fixé. Ainsi, nous présenterons les résultats obtenus. Enfin, la comparaison des résultats obtenus avec la solution analytique de **l'équation (1)** sera exposée.

2. Méthodologie

2-1. Calcul de α

Prenons **l'Equation (2)** pour $\beta = 1$, on obtient l'**Equation** différentielle suivante :

$$\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} = D_h \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - v_p \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} - \lambda C(x,t) \quad (3)$$

Pour la dérivée fractionnaire temporelle, on a utilisé la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de [3, 4],

$$L_p \left(\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) = p^\alpha C(x,p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [D^{\alpha-k-1} C(x,t)_{t=0}] \quad (4)$$

Comme $0 < \alpha \leq 1$, donc $n = 1$. La condition initiale $C(x,t)_{t=0} = C(x,t=0) = C_0$ est constante quel que soit la valeur de x .

En remplaçant $C(x,t=0)$ par C_0 , la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville devient :

$$L_p \left(\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) = p^\alpha F(p) - D^{\alpha-1} C_o \quad (5)$$

où $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} C(x,t) dt = C(x,p)$ est la transformée de Laplace de la fonction $C(x,t)$.

Pour Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire d'ordre α de C_o n'est pas nulle [3, 4], car C_o est constant.

$$D^\alpha C_o = \frac{C_o}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \text{ où } \Gamma(1-\alpha) \text{ est une fonction gamma} \quad (6)$$

$$\text{Donc on a : } D^{\alpha-1} C_o = \frac{C_o}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \quad (7)$$

En remplaçant $D^{\alpha-1} C_o$ par sa valeur, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Riemann-Liouville devient :

$$L_p \left(\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) = p^\alpha C(x,p) - \frac{C_o}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \quad (8)$$

Pour le second membre, comme la transformée de Laplace est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} L_p \left(D_h \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - v_p \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} - \lambda C(x,t) \right) &= D_h \frac{d^2}{dx^2} L_p(C(x,t)) - v_p \frac{d}{dx} L_p(C(x,t)) \\ - \lambda L_p(C(x,t)) &= D_h \frac{d^2}{dx^2} C(x,p) - v_p \frac{d}{dx} C(x,p) - \lambda C(x,p) \end{aligned} \quad (9)$$

En combinant les **Equations (8) et (9)**, on obtient l'**Equation** différentielle suivante :

$$D_h \frac{d^2}{dx^2} C(x,p) - v_p \frac{d}{dx} C(x,p) - (\lambda + p^\alpha) C(x,p) = - \frac{C_o}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} \quad (10)$$

Les conditions aux limites que nous avons considérées sont :

$$C(0,t) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} C(x,t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} C(x,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial C(x=0,t)}{\partial x} = 0$$

En résolvant l'**Equation (10)** et en suivant les conditions aux limites et initiales, nous avons obtenu la solution suivante :

$$C(x,p) = - \frac{C_o}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda+p^\alpha)} t^{1-\alpha} \exp \left[\frac{v_p x}{2D_h} \left(1 - \left(1 + \frac{4D_h(\lambda+p^\alpha)}{v_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] + \frac{C_o t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda+p^\alpha)} \quad (11)$$

Si $\alpha = 1$ la transformée de Laplace (x,p) devient :

$$C(x,p) = - \frac{C_o}{\lambda+p} \exp \left[\frac{v_p x}{2D_h} \left(1 - \left(1 + \frac{4D_h(\lambda+p)}{v_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] + \frac{C_o}{\lambda+p} \quad (12)$$

La solution analytique [5] s'écrit :

$$C(x,t) = -e^{-\lambda t} \frac{C_o}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-v_p t}{2\sqrt{D_h t}} \right) + \exp \left(\frac{v_p x}{D_h} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+v_p t}{2\sqrt{D_h t}} \right) \right] + C_o e^{-\lambda t} \quad (13)$$

L'Equation (13) est une **Equation** analytique de l'**Equation** de diffusion (**Equation (1)**).

Si $\alpha \neq 1$, il y a un grand problème pour trouver la solution analytique. Donc nous avons employé la méthode numérique de Stehfest déjà connue. Elle a été publiée par Harald Stehfest en 1970.

Méthode de [6, 7]

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$. La transformée inverse de la fonction $F(p)$ est $f(t)$:

$$f(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j F\left(\frac{j \ln(2)}{t}\right) \quad (14)$$

Pour $N = 20$ (double précision), les valeurs successives de V_j sont présentées dans le **Tableau 1**

Tableau 1 : Valeurs successives de V_j pour $1 \leq j \leq 20$ [6, 7]

j	V_j	j	V_j
1	$-5.511463844797178 * 10^{-6}$	11	$-2.870209211471027 * 10^{11}$
2	$1.523864638447922 * 10^{-1}$	12	$6.829920102815115 * 10^{11}$
3	$-1.174654761904762 * 10^2$	13	$-1.219082330054374 * 10^{12}$
4	$1.734244933862434 * 10^4$	14	$1.637573800842013 * 10^{12}$
5	$-9.228069289021164 * 10^5$	15	$-1.647177486836117 * 10^{12}$
6	$2.377408778710318 * 10^7$	16	$1.221924554444226 * 10^{12}$
7	$-3.494211661953704 * 10^8$	17	$-6.488065588175326 * 10^{11}$
8	$3.241369852231879 * 10^9$	18	$2.333166532137059 * 10^{11}$
9	$-2.027694830723779 * 10^{10}$	19	$-5.091380070546738 * 10^{10}$
10	$8.946482982379724 * 10^{10}$	20	$5.091380070546738 * 10^9$

En utilisant la méthode de Stehfest, nous avons obtenu la formule suivante :

$$C(x, t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j C\left(x, \frac{j \ln 2}{t}\right) \quad (15)$$

$$C\left(x, \frac{j \ln 2}{t}\right) = \frac{C_0 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{v_p x}{2D_h} \left(1 - \left(1 + \frac{4D_h(\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)^{\frac{1}{2}}}{v_p^2}\right)\right)\right] \right\} \quad (16)$$

$$C(x, t) = \sum_{j=1}^N \ln(2) V_j \frac{C_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)} \left\{ 1 - \exp\left[\frac{v_p x}{2D_h} \left(1 - \left(1 + \frac{4D_h(\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)^{\frac{1}{2}}}{v_p^2}\right)\right)\right] \right\} \quad (17)$$

L'Equation (17) est une solution analytique approchée obtenue par la méthode de Stehfest. En appliquant la condition $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, t) = 0$ à **l'Equation (17)**, nous avons obtenu **l'Equation (18)** suivante :

$$\sum_{j=1}^N \ln(2) V_j \frac{C_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)} = 0 \quad (18)$$

Sachant que C_0 , $t^{-\alpha}$, $\Gamma(2 - \alpha)$ fonction gamma et $\ln(2)$ sont indépendants de j , donc on peut les faire sortir de la somme, nous avons obtenu alors ***l'Equation (19)*** :

$$\sum_{j=1}^N V_j \frac{1}{(\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)} = 0 \quad (19)$$

Comme $\lambda + (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha = \lambda [1 + \frac{1}{\lambda} (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha]$, ***l'Equation (19)*** peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N V_j \frac{1}{(1 + \frac{1}{\lambda} (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)} = 0 \text{ avec } \lambda \neq 0 \quad (20)$$

Quand t est assez grand, $\frac{1}{\lambda} (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha$ est proche de zéro, on peut utiliser le développement limité d'ordre 1 au voisinage de zéro donc on a :

$$\frac{1}{(1 + \frac{1}{\lambda} (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha)} = 1 - \frac{1}{\lambda} (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha \quad (21)$$

L'Equation (20) devient

$$\sum_{j=1}^N V_j - \sum_{j=1}^N V_j \frac{1}{\lambda} (\frac{j \ln 2}{t})^\alpha = 0 \quad (22)$$

L'Equation (22) est une ***Equation*** qui permet de trouver la valeur du paramètre α pour t fixé. Le calcul de λ des composés organiques se rapproche de la désintégration des composés radioactifs ou de substances dite instables dans leur comportement [1]

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C \text{ ce qui donne donc après intégration : } C = C_0 e^{-\lambda t} \quad (23)$$

Nous avons utilisé les données d'Edvina Luca Lamy pour calculer le taux de biodégradation λ . Les paramètres de transport colloïdal en conditions saturées (valeur moyennes de deux colonnes) sont donnés dans le ***Tableau 2***.

Tableau 2 : Données obtenues par [8]

colonne	T	TS	M	MS
$\frac{C}{C_0}$	0.1	0.06	0.075	0.02
R	0.9	1	0.7	0.72
$t_s(\text{mn})$	88.4	96	78.5	89

t_s Temps de résidences moyen ; T Colonne de sable ; TS Colonne de sable avec géotextile ; M Colonne de sable avec macropore ; MS Colonne de sable avec macropore et géotextile ; R Le facteur de retard ; C_0 Concentration initiale c'est-à-dire la concentration à l'instant $t = 0$; et C Concentration à la sortie.

En utilisant la **Formule (23)**, nous avons calculé λ

$$\lambda = -\frac{1}{t} \ln\left(\frac{C}{C_0}\right) \quad (24)$$

On prend $t = t_s$. Nous avons trouvé les différentes valeurs de λ dans le **Tableau 3** ci-dessous.

Tableau 3 : Taux de biodégradation pour $t = t_s$

Colonne	T	TS	M	MS
$\lambda(\text{mn}^{-1})$	0.026	0.0293	0.03299	0.0439

2-2. Calcul de β pour $\beta \neq 1$

Prenons **l'Equation (2)**: $\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} = D_h \frac{\partial^{2\beta} C(x,t)}{\partial x^{2\beta}} - v_p \frac{\partial^\beta C(x,t)}{\partial x^\beta} - \lambda C(x,t)$

$$0 < \alpha \leq 1; 1 < 2\beta \leq 2$$

Pour calculer la valeur de β de **l'Equation (2)**, nous avons utilisé la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo [3,4] pour le premier membre :

$$L_p \left(\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) = p^\alpha C(x,p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D^{\alpha-k-1} \frac{d^k}{dt^k} C(x,t)_{t=0} \right] \quad (25)$$

Comme $0 < \alpha \leq 1$ donc $n = 1$. Connaissant $C(x,t)_{t=0} = C(x,t=0) = C_0$ est constante quel que soit x , et comme k est un entier donc $\frac{d^k}{dt^k} C(x,t)_{t=0} = 0$

$$\text{D'où } L_p \left(\frac{\partial^\alpha C(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) = p^\alpha C(x,p) \quad (26)$$

Pour le second membre, sachant que la transformée de Laplace de la fonction $C(x,t)$ est :

$$C(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} C(x,t) dt = L_p(C(x,t)), \text{ et comme la transformée de Laplace est linéaire :}$$

$$L_p \left(D_h \frac{\partial^{2\beta} C(x,t)}{\partial x^{2\beta}} - v_p \frac{\partial^\beta C(x,t)}{\partial x^\beta} - \lambda C(x,t) \right) = D_h \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} L_p(C(x,t)) - v_p \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} L_p(C(x,t)) - \lambda L_p(C(x,t))$$

D'où nous avons eu la transformée de Laplace du second membre

$$L_p \left(D_h \frac{\partial^{2\beta} C(x,t)}{\partial x^{2\beta}} - v_p \frac{\partial^\beta C(x,t)}{\partial x^\beta} - \lambda C(x,t) \right) = D_h \frac{\partial^{2\beta} C(x,p)}{\partial x^{2\beta}} - v_p \frac{\partial^\beta C(x,p)}{\partial x^\beta} - \lambda C(x,p) \quad (27)$$

En combinant **les Equations (26) et (27)**, on obtient **l'Equation** différentielle suivante :

$$D_h \frac{\partial^{2\beta} C(x,p)}{\partial x^{2\beta}} - v_p \frac{\partial^\beta C(x,p)}{\partial x^\beta} - (\lambda + p^\alpha) C(x,p) = 0 \quad (28)$$

L'Equation (28) est une **Equation** différentielle linéaire à indice fractionnaire [9]. On se propose de résoudre cette équation. Pour $C(x,p) = e^{mx}$, m devra satisfaire : $D_h m^{2\beta} - v_p m^\beta - (\lambda + p^\alpha) = 0$ [9].

L'objectif est de chercher la valeur du paramètre m . En posant $m^\beta = r \Leftrightarrow m = r^{\frac{1}{\beta}}$, on a :

$$D_h r^2 - v_p r - (\lambda + p^\alpha) = 0 \quad (29)$$

Résolution de l'**Equation (29)** dont l'inconnu est r . La solution est donc :

$$r_1 = \frac{v_p + \sqrt{v_p^2 + 4D_h(p^\alpha + \lambda)}}{2D_h} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{v_p - \sqrt{v_p^2 + 4D_h(p^\alpha + \lambda)}}{2D_h} \quad (30)$$

La solution de l'**Equation (28)** est de la forme

$$C(x, p) = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} \quad (31)$$

où A et B sont des constantes arbitraires. La solution complète [9] est :

$$C(x, p) = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} + A_1 + A_2 x + \dots + A_n x^n \quad (32)$$

où les A_i sont des nombres réels et n est un entier positif indéterminé.

En suivant les conditions aux limites : $C(0, p) = \int_0^\infty C(0, t) e^{-pt} dt = 0$ car $C(0, t) = 0$

Nous avons obtenu la relation suivante :

$$A + B + A_1 = 0 \quad (33)$$

De plus $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, p) = \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} C(x, t) e^{-pt} dt = 0$ car $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x, t) = 0$ d'après les conditions aux limites. Pour qu'on ait un sens physique, nécessairement

$$A = A_2 = \dots A_n = 0 \quad (34)$$

$$\text{L'Equation (33) devient : } B + A_1 = 0. \text{ Cela veut dire que } B = -A_1 \neq 0 \quad (35)$$

La solution de l'**Equation** différentielle **Equation(28)** est :

$$C(x, p) = A_1 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{v_p - \sqrt{v_p^2 + 4D_h(p^\alpha + \lambda)}}{2D_h} \right]^{\frac{1}{\beta}} x \right\} \quad (36)$$

Un grand problème se pose toujours pour trouver la solution analytique. Nous avons réutilisé la méthode numérique de Stehfest déjà connue.

$$C(x, t) = A_1 \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j \left\{ 1 - \exp \left[\frac{v_p - \sqrt{v_p^2 + 4D_h \left(\left(\frac{j \ln 2}{t} \right)^\alpha + \lambda \right)}}{2D_h} \right]^{\frac{1}{\beta}} x \right\} \quad (37)$$

L'**Equation (37)** est une solution analytique approchée. En utilisant la condition $\frac{\partial C(x=0, t)}{\partial x} = 0$, nous avons obtenu donc la relation suivante

$$\sum_{j=1}^N V_j \left\{ \left[\frac{v_p - \sqrt{v_p^2 + 4D_h \left(\left(\frac{j \ln 2}{t} \right)^\alpha + \lambda \right)}}{2D_h} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right\} = 0 \quad (38)$$

L'Equation (38) est une équation qui permet de trouver la valeur du paramètre $\beta \neq 1$ pour α et t fixent.

3. Résultats et discussion

3-1. Calcul de α pour $\beta = 1$

Pour $\lambda = 0.026$, nous avons tracé la courbe de la fonction $f(\alpha) = \sum_{j=1}^N V_j - \sum_{j=1}^N V_j \frac{1}{\lambda} \left(\frac{j \ln 2}{t} \right)^\alpha$ pour déterminer le réel α solution de la fonction $f(\alpha)$ pour t fixé.

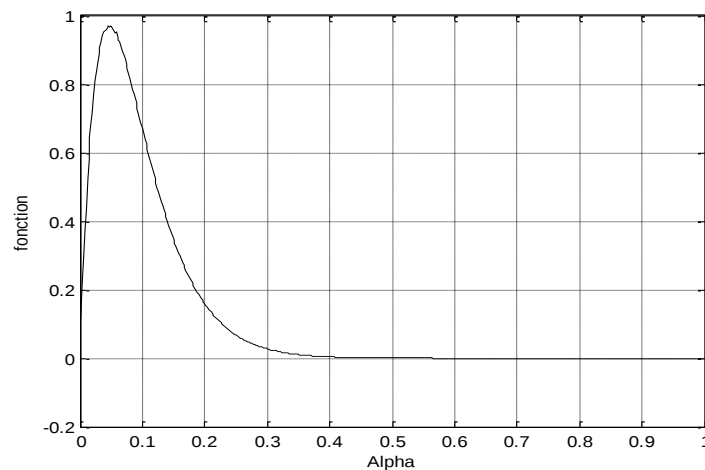


Figure 1 : Courbe de la fonction $f(\alpha)$

A partir de la courbe obtenue sur **Figure 1**, nous pouvons déterminer le réel α solution de la fonction $f(\alpha)$ en zoomant la courbe de la **Figure 1** suivant l'axe des abscisses. On obtient alors la **Figure 2**.

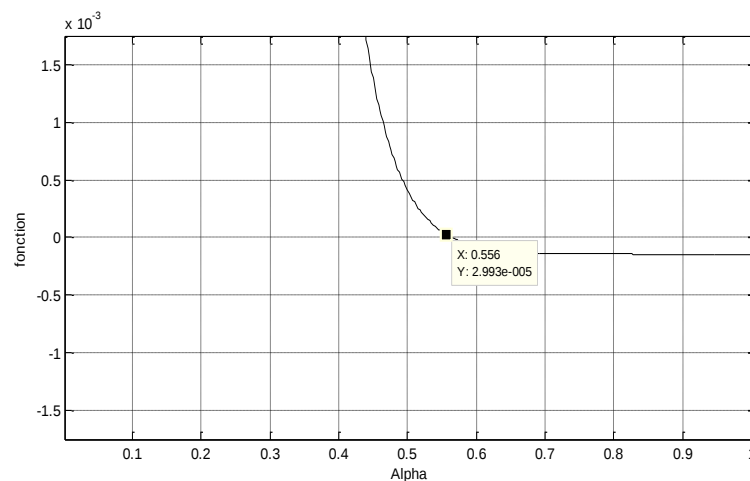


Figure 2 : Courbe de la fonction $f(\alpha)$ zoomée

La courbe de la **Figure 2** est une courbe obtenue lorsqu' on a zoomé la courbe de la **Figure 1** suivant l'axe des abscisses. En regardant cette courbe, nous avons trouvé une solution approchée $\alpha = 0.556$.

3-2. Comparaisons des deux courbes obtenues analytiquement et numériquement

Les données suivantes sont utilisées. La vitesse est $0.03 \text{ cm/mn} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/mn}$, $D_e = D = 0.002 \text{ cm}^2/\text{s} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{mn}$, le coefficient de retard $R = 0.9$ et $C_0 = 200 \text{ mg/l}$ [8].

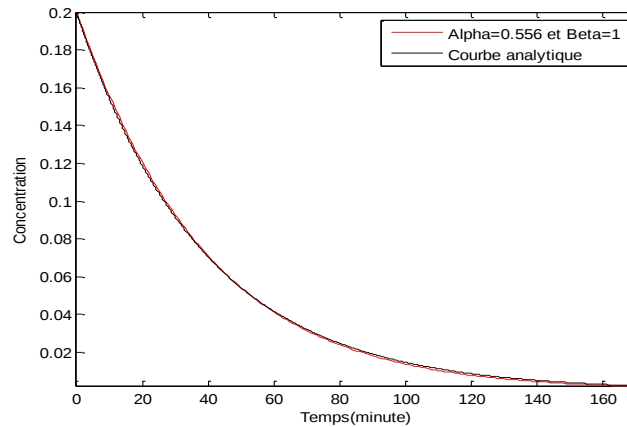


Figure 3 : Comparaison de la variation de concentration obtenue analytiquement et celle obtenue numériquement pour $\alpha = 0.556$ et $\beta = 1$

La courbe noire représente la concentration obtenue analytiquement et la courbe rouge celle obtenue par la méthode numérique. On remarque que les deux courbes se superposent.

3-3. Calcul de β si $\beta \neq 1$

Fixons $\alpha = 0.556$ et calculons β pour $\beta \neq 1$. Nous avons cherché la valeur de β en résolvant l'Equation (38). Nous avons tracé la courbe de la fonction

$$f_{\alpha}(\beta) = \sum_{j=1}^N V_j \left\{ \left[\frac{v_p - \sqrt{v_p^2 + 4D_h \left(\left(\frac{j \ln 2}{t} \right)^{\alpha} + \lambda \right)}}{2D_h} \right]^{\frac{1}{\beta}} \right\} \text{ pour déterminer le réel } \beta \text{ avec } t \text{ fixé. } D_h \text{ et } v_p \text{ sont}$$

connus (Voir la **Figure 4**)

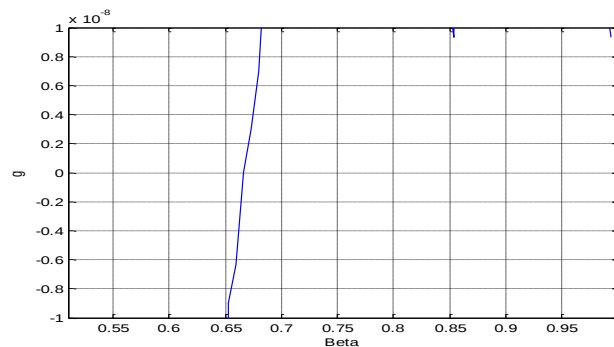


Figure 4 : Courbe de la fonction $f_{\alpha}(\beta)$

A partir de la courbe obtenue sur la **Figure 4**, nous pouvons déterminer le réel β solution de la fonction $f_{\alpha}(\beta)$ en zoomant cette courbe. On obtient alors la **Figure 5**.

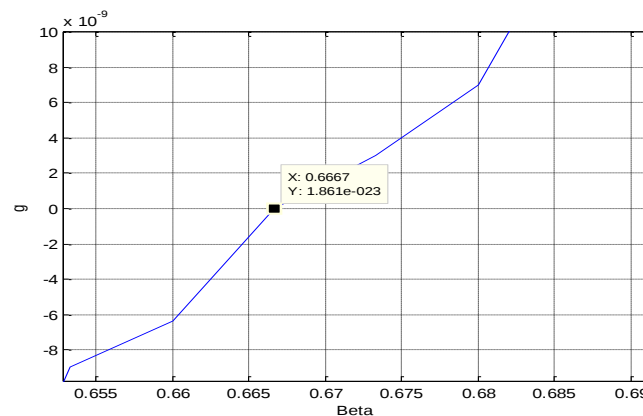


Figure 5 : Courbe de la fonction $f_{\alpha}(\beta)$ zoomée

Nous avons zoomé la **Figure 4**, nous avons obtenu la **Figure 5**. En regardant cette courbe, on voit bien qu'il y a une solution approchée $\beta = 0.6667$ de la fonction $f_{\alpha}(\beta)$.

3-4. Comparaisons des résultats obtenus avec la courbe analytique

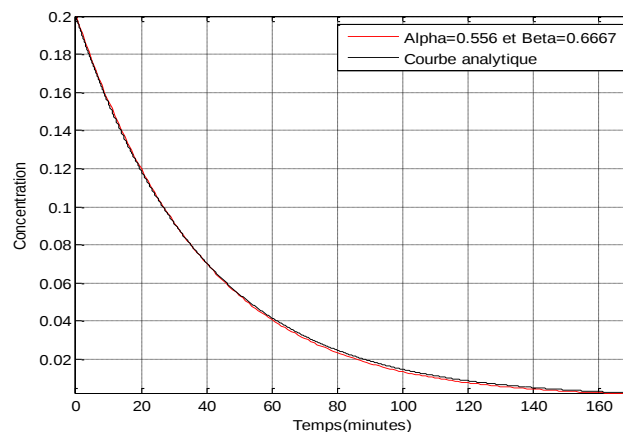


Figure 6 : Comparaison de la variation de concentration obtenue analytiquement et celle obtenue numériquement pour $\alpha = 0.556$ et $\beta = 0.6667$

En regardant la **Figure 6**, la courbe obtenue analytiquement et celle obtenue numériquement se superposent. En observant les valeurs des erreurs dans le **Tableau 4**, on constate que la **Figure 6** comporte moins d'erreur que la **Figure 3** et donc plus satisfaisante.

Tableau 4 : Étude des erreurs

	Courbe analytique et numérique pour $\alpha = 0.556$ $\beta = 1$	Courbe analytique et numérique pour $\alpha = 0.556$ $\beta = 0.6667$
Écart maximal entre la courbe analytique et la courbe numérique	$2.8573 \cdot 10^{-3}$	$2.8505 \cdot 10^{-3}$
Erreur en %	1.49%	1.48%

En fixant la valeur de α obtenue et en cherchant la valeur de β à partir de *l'Equation (38)*, nous avons constaté qu'il existe un couple $(\alpha; \beta)$ dont l'injection dans *l'Equation (2)* donne une solution numérique proche de la solution analytique de *l'Equation (1)*.

4. Conclusion

Cet article a été axé sur la résolution numérique de l'équation de transport de colloïdes en milieu poreux utilisant les approches fractionnaires. Dans ces approches, nous avons utilisé le schéma de Grünwald-Letnikov. Nous avons aussi utilisé les résultats expérimentaux d'Edvina Muca Lamy pour les différentes constantes de l'équation différentielle. Les résultats obtenus ont montré que la solution approchée obtenue par le modèle fractionnaire est très proche de la solution analytique. En perspective, nous pouvons envisager d'utiliser plusieurs valeurs de taux de biodégradation dans le but d'améliorer la performance du modèle fractionnaire.

Références

- [1] - T. BLONDEL, "*Pollution sous-terrain : paramètres et paramétrage des modèles en écoulement et transport de polluants*", INERIS Projet TRANSPOL programme 2000-Volet, 2 (2001).
- [2] - M. GARG and P. MANOHAR, "*Analytical solution of Space-time fractional Fokker Planck Equation by Generalized differential transforms Method*", Le MATEMATICHE, 17 (2011) 91 - 101.
- [3] - S. H. RAKOTONASY, "*Modèle fractionnaire pour la sous-diffusion : version stochastique et edp*", Thèse de doctorat, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, (2012).
- [4] - A. MOHAMED-SALAH, "*Les systèmes Chaotiques à dérivées fractionnaire*", Mémoire de maitrise, Université Mentouri-Constantine, Algérie, (2009).
- [5] - A. OGATA and R. B. BANKS, "*A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media*", US Geological Survey Professional Papers, (34) (1961), A1 - A7.
- [6] - H. STEHFEST, "*Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms*", Communications of The ACM-CACM, 13 (1) (1970) 47 - 49.
- [7] - Y. JANNOT, "*Transferts Thermiques*", Supports de cours 2^{ème} année, Ecole de mine Nancy, (2012).
- [8] - E. M. Lamy, "*Écoulement et transfert colloïdal dans des matrices hétérogènes stratifiées : Application à des milieux poreux modèles*", Thèse de doctorat, Université Centrale de Nantes, (2008).
- [9] - J. LIOUVILLE, "*Intégration des équations différentielle à indices fractionnaires*", *Journal de l'École polytechnique*, 15 (25) (1836) 58 - 84.