

Présentation de la “Taylor Meshless Method”, une méthode sans maillage basée sur les séries de Taylor

D. Sylvain ZEZE^{1*}, Louis Clément BAH² et Yao KRAMOH¹

¹ *Laboratoire de Mathématique et Informatique, UFR des Sciences Fondamentales et Appliquées, Université Nangui Abrogoua, 02 BP V 102 Abidjan, Côte d'Ivoire*

² *Laboratoire de Mathématiques Appliquées, UFR Mathématique et Informatique, Université Félix Houphouët-Boigny, 22 BP 582 Abidjan 22, Côte d'Ivoire*

* Correspondance, courriel : sylvain.zeze@una-ufrsfa.com

Résumé

Dans cet article, nous présentons la Taylor Meshless Method en dimension un pour la résolution d'équations différentielles ordinaires. Dans un élément donné, l'équation différentielle ordinaire est résolue de manière exacte par une technique de perturbation et l'inconnue ne dépend que de deux variables nodales par l'intermédiaire de polynômes d'ordre élevé. Ces polynômes sont construits en injectant dans l'équation les développements de Taylor de chaque terme de l'équation et représentent la solution exacte de l'équation différentielle à l'intérieur de l'élément. La Taylor meshless method a les avantages de la p-version des éléments finis comme le contrôle facile de l'erreur de discrétisation et un traitement précis des couches limites. Des tests sur un problème linéaire et non-linéaire illustre les possibilités de la méthode.

Mots-clés : *méthode des éléments finis, Taylor meshless method, série de Taylor, méthodes sans maillage, p-version.*

Abstract

Presentation of the “Taylor Meshless Method”, a meshless method based on Taylor series

The paper deals with the numerical solution of ordinary differential equations by a new variant of the finite element method, Taylor Meshless Method. In a given element, the ordinary differential equation is solved by Taylor meshless method and the unknown depends on the nodal values via high order interpolation polynomials. These polynomials are built up the perturbation technique and so they account for the ordinary differential equations inside the element. It seems that this new variant permits to recover some of the advantages of the p-version of the finite element, as an easy control of the discretization error and an accurate treatment of boundary layers. Tests concerning linear and nonlinear equations illustrate the possibilities of the method.

Keywords : *finite element method, Taylor meshless method, Taylor series expansion, meshless method, p-version.*

1. Introduction

De nombreux problèmes issus de la physique et de la mécanique conduisent à des équations aux dérivées partielles (EDP). Il existe plusieurs méthodes numériques pour la résolution de ces EDPs. Une bonne méthode numérique doit être précise, robuste, facile d'utilisation avec un large domaine d'application. En mécanique des solides, c'est la méthode des éléments finis (MEF) qui vérifie au mieux ces caractéristiques. Cette méthode est basée sur des approximations polynomiales de bas degré. Il existe une variété de méthodes dites sans maillage qui contrairement à la MEF, construisent la solution d'une EDP en utilisant seulement un ensemble de points dans le domaine sans nécessiter un maillage. Ces méthodes diffèrent les unes des autres par l'interpolation effectuée pour la construction des fonctions de formes, la technique de résolution de l'EDP (formulation faible ou forte) ou la discrétisation du domaine. On peut les classer en deux grandes familles : les méthodes de type Galerkin (utilisant la forme faible de l'EDP) et les méthodes de type collocation (utilisant la forme forte de l'EDP). La Taylor Meshless Method (TMM) introduite récemment par ZEZE dans sa thèse (2009) [1] est une méthode sans maillage de type collocation. La TMM a déjà fait l'objet de quelques études, [2-6], plusieurs travaux sont en cours. L'EDP est satisfaite de façon exacte ou quasi exacte sous sa forme forte dans le domaine en utilisant un développement de Taylor de la solution tronquée à l'ordre π . Dans cet article, nous nous intéressons aux problèmes de dimension 1. Dans ce cas, la TMM est proche de la P-version des éléments finis [7-10] qui représente la solution comme un polynôme d'ordre élevé. La P-version calcule ce polynôme par la méthode de Galerkin qui utilise des intégrations avec un nombre important de points de Gauss, alors que la TMM permet une résolution analytique sur l'élément, ce qui est beaucoup moins coûteux. En effet, avec la TMM, dans chaque élément, on résout l'équation différentielle à partir d'un développement en série entière tronquée à l'ordre p , à partir du centre de l'élément.

2. Méthodologie

En dimension un, le domaine Ω est subdivisé en N nœuds, $N \geq 2$ soit $N - 1$ éléments. La TMM s'établit en deux étapes. La première étape consiste à faire une résolution exacte du problème sur chaque élément. Cette résolution se fait en injectant les développements de Taylor de chaque terme de l'équation dans celle-ci. Nous arrivons à exprimer les coefficients de Taylor de u^e , la solution élémentaire, en fonction des deux premiers. Des fonctions de formes de type polynomial de degré π apparaissent. La deuxième étape consiste à résoudre le problème global obtenu de l'assemblage des solutions élémentaires. Les conditions aux limites ainsi que les conditions de continuités de la solution et de sa dérivée aux nœuds permettent de déterminer les $2 \times N$ inconnues du problème.

2-1. Mise en œuvre

Considérons le **Problème (1)** suivant

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x)u(x) = g(x) & \text{pour } x \in \Omega = [-L, L] \\ u(-L) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données et $u(x)$ est l'inconnue du problème.

Le domaine $\Omega \equiv [-L, +L]$ est discrétisé en $N - 1$ éléments 1Δ à 2 nœuds (voir **Figure 1**). N est le nombre de nœuds et x_c^e est la coordonnée du centre de l'élément e défini par $x_c^e = \frac{x_1^e + x_2^e}{2}$

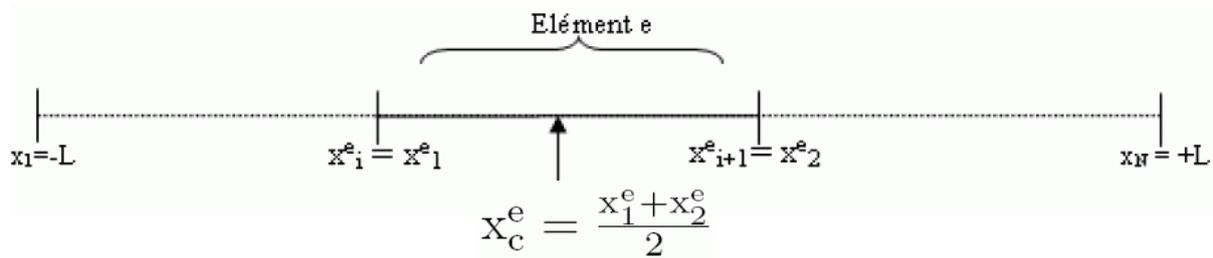


Figure 1 : Maillage 1D

L'idée de ce travail est de chercher une solution analytique approchée du **Problème (1)**, dans l'élément e , sous la forme d'un développement en série entière au voisinage de x_c^e .

Les développements en x_c^e des termes du **Problème (1)** sont donnés ci-dessous :

$$u^e(x) = \sum_{k=0}^p u_k^e (x - x_c^e)^k \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^e(x) = \sum_{k=0}^p f_k^e (x - x_c^e)^k \\ g^e(x) = \sum_{k=0}^p g_k^e (x - x_c^e)^k \\ \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} = \sum_{k=0}^{p-2} (k+2)(k+1) u_{k+2}^e (x - x_c^e)^k \\ f^e(x) u^e(x) = \sum_{k=0}^{2p} \sum_{i=0}^k u_{k-i}^e f_i^e (x - x_c^e)^k \end{array} \right. \tag{3}$$

En injectant ces développements dans **l'Equation (1)** et en identifiant terme à terme suivant la puissance de $(x - x_c^e)$, on obtient tous les coefficients de $u^e(x)$ en fonction des deux premiers u_0^e et u_1^e :

$$u_k^e = \gamma_k + \alpha_k u_0^e + \beta_k u_1^e ; \quad 2 \leq k \leq p \tag{4}$$

Le calcul établit que γ_k , α_k et β_k ne sont fonction que des données du problème et sont obtenus par des formules de récurrence qui ne demandent qu'un faible coût de calcul :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \gamma_1 = 0 \\ \gamma_k = \frac{1}{k(k-1)} (-g_{k-2}^e + \sum_{r=0}^{k-2} f_{k-2-r}^e \gamma_r) \\ \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0 \\ \alpha_k = \frac{1}{k(k-1)} (\sum_{r=0}^{k-2} f_{k-2-r}^e \alpha_r) \\ \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1 \\ \beta_k = \frac{1}{k(k-1)} (\sum_{r=0}^{k-2} f_{k-2-r}^e \beta_r) \end{array} \right. \quad 2 \leq k \leq p \tag{5}$$

La résolution de l'**Equation** différentielle (1) sur l'élément e par la TMM revient donc à exprimer l'inconnue $u^e(x)$ en fonction des données $f^e(x)$ et $g^e(x)$ et des deux premiers termes u_0^e et u_1^e . On peut résumer cette formulation sous l'expression vectorielle suivante :

$$u^e(x) = \{P(x)\}^T \left(\{\gamma\} + [\alpha, \beta] \begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} \right) \quad (6)$$

Où le vecteur $P(x)$ rassemble les polynômes de base $(x - x_c^e)^k$. $\{P(x)\}^T = \{1, x - x_c^e, \dots, (x - x_c^e)^k, \dots, (x - x_c^e)^p\}$. La **Formule (6)** nous donne une approximation polynomiale de degré p de la solution de l'Equation (1) sur l'élément e . Cette **formule (6)** peut se réécrire sous la forme d'une approximation nodale. Pour cela, on définit les variables nodales $q_1^e = u^e(x_1^e)$ et $q_2^e = u^e(x_2^e)$.

$$\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} = \{P_\gamma\} + [P_{\alpha\beta}] \begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \{P_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \{P(x_1^e)\}^T \{\gamma\} \\ \{P(x_2^e)\}^T \{\gamma\} \end{Bmatrix} \\ [P_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \{P(x_1^e)\}^T \{\alpha\} & \{P(x_1^e)\}^T \{\beta\} \\ \{P(x_2^e)\}^T \{\alpha\} & \{P(x_2^e)\}^T \{\beta\} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

On déduit les deux coefficients du polynôme u_0^e et u_1^e en fonction des variables nodales :

$$\begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} = [P_{\alpha\beta}]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} - \{P_\gamma\} \right) \quad (8)$$

L'inconnue élémentaire $u^e(x)$ est alors fonction des deux variables nodales q_1^e et q_2^e , par une formule qui fait apparaître trois fonctions de forme

$$u^e(x) = N_0^e(x) + q_1^e N_1^e(x) + q_2^e N_2^e(x) \quad (9)$$

$$\text{Où} \quad \begin{cases} N_0^e(x) = \{P(x)\}^T \left(\{\gamma\} - [\alpha, \beta] [P_{\alpha\beta}]^{-1} \{P_\gamma\} \right) \\ \begin{Bmatrix} N_1^e(x) \\ N_2^e(x) \end{Bmatrix} = \{P(x)\}^T [\alpha, \beta] [P_{\alpha\beta}]^{-1} \end{cases}$$

La **Formule (9)** résume l'interpolation de l'inconnue $u^e(x)$ sur l'élément ε . Par rapport à l'élément fini linéaire, elle fait apparaître trois fonctions de forme au lieu de deux. La nouvelle fonction $N_0^e(x)$ provient du second membre $g^e(x)$: c'est la solution approchée de l'équation différentielle avec des données nulles aux bords de l'élément. C'est un polynôme de degré π , de même que les autres fonctions $N_1^e(x)$ et $N_2^e(x)$ qui correspondent à la solution approchée de l'équation homogène ($g^e(x) = 0$) avec les valeurs données aux bords de l'élément : $N_1^e(x_1^e) = 1$ et $N_1^e(x_2^e) = 0$ et $N_2^e(x_1^e) = 0$ et $N_2^e(x_2^e) = 1$. Une fois les fonctions de forme $N_0^e(x)$, $N_1^e(x)$ et $N_2^e(x)$ déterminées, nous entamons la deuxième étape de la TMM qui consiste à écrire la continuité de l'inconnue $u(x)$ et celle de sa dérivée $u'(x)$ aux nœuds. La première condition, continuité de $u(x)$ est imposée par le choix des fonctions de forme. Il reste donc à écrire la continuité de la dérivée aux nœuds.

Cette continuité est établie à partir de la formulation faible des équations, en supposant que l'équation différentielle est résolue exactement par la TMM. Cette résolution nécessite une seule inversion d'une matrice tridiagonale et symétrique dont la taille ne dépend que du nombre d'éléments N . L'avantage évident de la technique est donc le gain en temps de calcul.

2-2. Problème non-linéaire

Pour les problèmes non-linéaires, on couple la technique proposée avec la méthode de Newton. Nous illustrons cette façon de faire sur un problème régi par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) + h(u(x)) = s(x) \\ u(\pm L) = 0 \end{cases}, -L < x < L \quad (10)$$

Où $h(u(x))$ est une fonction non linéaire de $u(x)$ et $s(x)$ est une fonction quelconque de x . Le principe de la méthode de Newton consiste à chercher un incrément $\Delta u(x)$ vérifiant le **Problème (10)**, linéarisé au voisinage d'une solution approchée $u_i(x)$, suivant :

$$-[\Delta u]'' + h_{,u}(u_i)\Delta u(x) + R^i(u_i(x)) = 0 \quad (11)$$

Où $h_{,u}$ est la dérivée de la fonction $h(u)$ par rapport à u et $R^i(u_i(x))$ est le résidu défini par:

$$R^i(u_i(x)) = -u''(x) + h(u(x)) - s(x) \quad (12)$$

Le **Problème (11)** a la même forme que le problème linéaire (1) où $f(x)$ et $g(x)$, dans ce cas, sont données par: $f(x) = h_{,u}(u_i)$ et $g(x) = R^i(u_i(x))$. La solution du problème (11) est obtenue en appliquant la technique proposée pour la résolution du **Problème (1)**, quand l'incrément $\Delta u(x)$ tend vers zéro.

3. Résultats et discussion

Dans cette partie, nous prenons le problème (1) avec : $f(x) = g(x) = 1$ c'est-à-dire : $-u''(x) + u(x) = 1$; $-L < x < L$; $u(\pm L) = 0$ dont la solution exacte est : $u(x) = 1 - \frac{\cosh(x)}{\cosh(L)}$. La solution exacte et les solutions obtenues pour différents ordres de troncature $p = 2, p = 6, p = 8$ et $p = 10$ et un seul élément ($N = 2$) sont représentées sur la **Figure 2**. Sur cette **Figure 2**, nous observons un comportement attendu de la TMM, la solution est mal approchée pour $p = 2$ et $p = 6$. Pour $p = 8$ et $p = 10$, la solution obtenue par la TMM est proche de la solution exacte. Nous avons une convergence en p comme dans la p-version. Dans le **Tableau 1**, nous comparons les valeurs en différents points du domaine, $x = 0, x = 2$ et $x = 5$ avec la solution exacte en ces points. Nous avons considéré un cas plus difficile avec une couche limite, $L = 48$ résolu avec 3 éléments. La **Figure 3** montre la solution approchée avec la solution exacte pour $p = 30$.

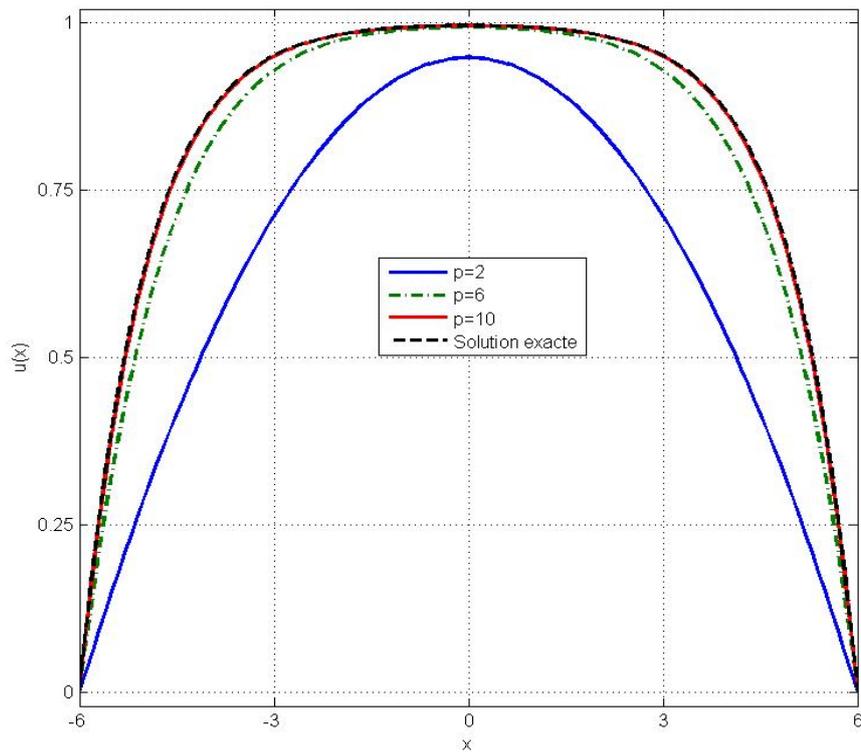


Figure 2 : Solution pour $f(x) = g(x) = 1$ et $L = 6$ et $N = 2$

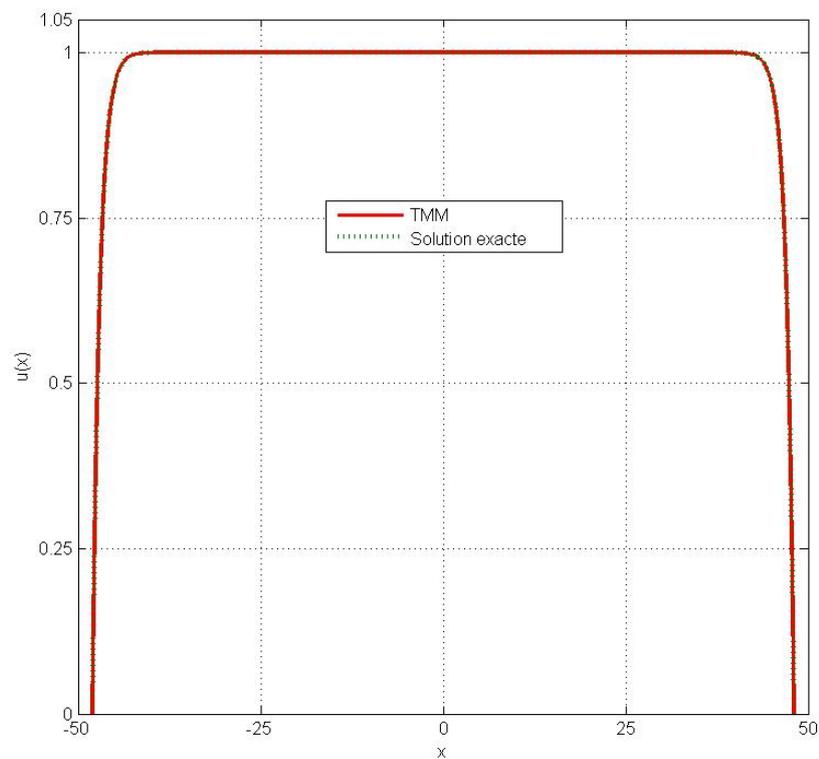


Figure 3 : Solution pour $f(x) = g(x) = 1$ et $L = 48$ et $N = 4$

Tableau 1 : Résultats numériques $f(x) = g(x) = 1$ et $L = 6$

x		0	2	5
TMM	$p = 2$	0.9473684210	0.8421052631	0.2894736842
	$p = 8$	0.9944276389	0.9790373082	0.6047458771
	$p = 14$	0.9950387796	0.9813349181	0.6318674365
	$p = 30$	0.9950425261	0.9813490130	0.6321061175
Solution exacte		0.9950425261	0.9813490130	0.6321061175

3-1. Convergence de la TMM

Avant toute étude de convergence, il est nécessaire de définir l'erreur. Nous considérons que l'erreur est l'écart entre la solution exacte et la solution approchée obtenue par la TMM.

$$erreur(x) = \left| \frac{u_{exact}(x) - u_{approché}(x)}{u_{exact}(x)} \right| \tag{13}$$

Comme dans toutes les méthodes d'éléments finis, il y a deux façons de faire converger la solution approchée vers la solution exacte. Avec une discrétisation spatiale fixée, on augmente l'ordre π de troncature des séries, on parle alors de p-convergence, comme dans la p-version [7, 11, 12]. Comme dans la méthode classique des éléments finis, on peut raffiner le maillage c'est-à-dire augmenter le nombre d'éléments, on parle alors de hp-convergence. Sur la **Figure 4**, l'erreur est calculée au point $x = 0$. La p-convergence se traduit par la croissance de chaque courbe qui exprime la décroissance de l'erreur pour un maillage fixé. Quant à la hp-convergence, elle se traduit par la position des différentes courbes sur la **Figure 4**. Pour obtenir une erreur de 10^{-6} par exemple, il faut $p = 9$ et 3 éléments, $p = 7$ et 6 éléments ou encore $p = 4$ et 24 éléments. Il semble donc plus efficace d'augmenter l'ordre p que d'augmenter le nombre d'éléments. Sur la **Figure 5**, on représente le résidu maximal de la solution en fonction de l'ordre π dans trois cas : pour la p-version à l'ordre p et pour la TMM à l'ordre p et à l'ordre $p = 5$. On constate que les deux méthodes convergent de manière comparable. La p-version converge plus vite avec le degré p mais à $p + 5$, la TMM est plus précise. Il est donc nécessaire de comparer la durée des calculs pour les deux méthodes, c'est ce que montre le **Tableau 2**.

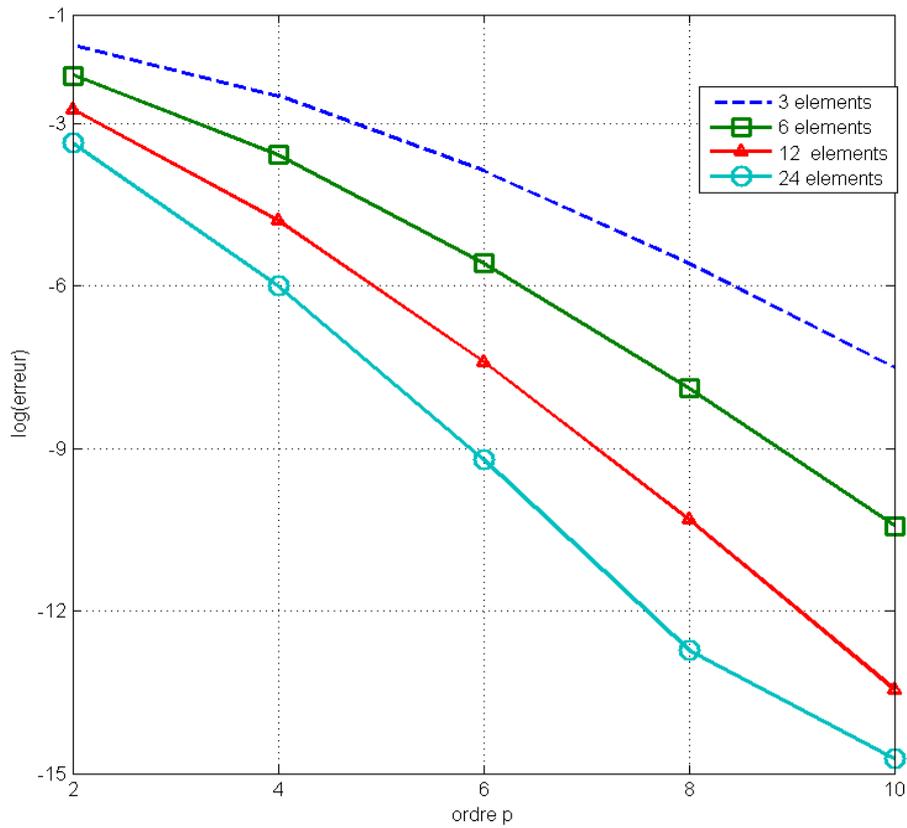


Figure 1 : Convergence pour $L = 6$

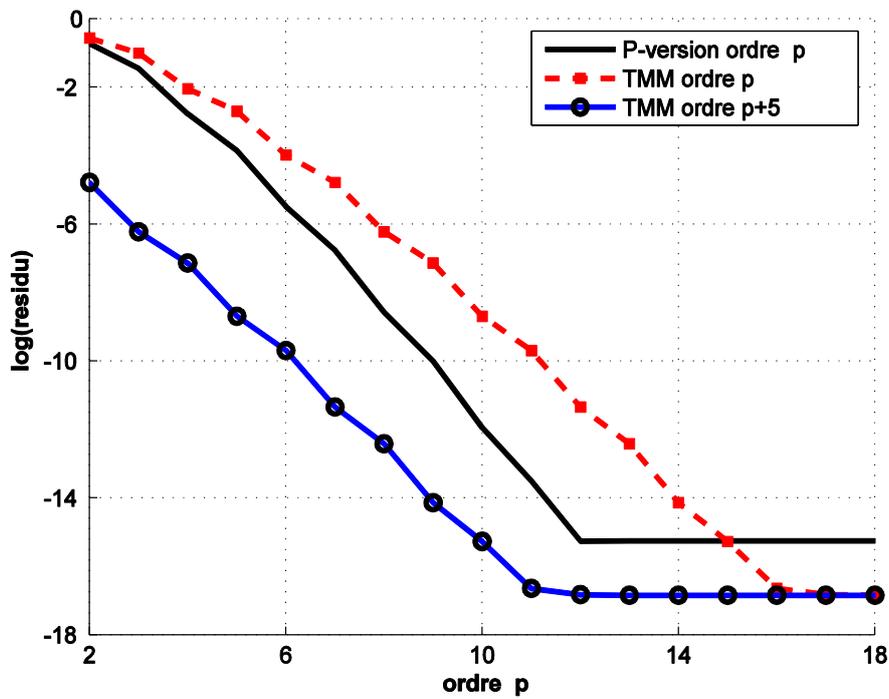


Figure 2 : Comparaison p-version et TMM

Tableau 2 : Comparaison du temps de calcul (en seconde) de la méthode de perturbation et de la p-version

	Ordre	3	6	8	12	16	18	20
Durée des calculs	P-version	4.0658	16.583	33.818	96.418	235.61	296.42	400.46
	TMM	0.1608	0.2203	0.2804	0.3805	0.5207	0.5508	0.6509

Le **Tableau 2** montre que, bien que la p-version converge plus vite, la TMM a l'avantage de nécessiter un faible coût de calcul ce qui lui permet d'être efficace. Ce **Tableau 2** montre également que l'augmentation de l'ordre p de troncature des séries n'a pas grande influence sur le temps de calcul dans la TMM.

3-2. Comparaison avec la méthode classique des éléments finis

Dans ce paragraphe on présente une comparaison (voir **Tableau 3**) de la TMM avec la méthode classique des éléments finis basés sur des fonctions d'interpolation linéaires ou quadratiques, dans le cas $L = 6, f(x) = g(x) = 1$. Avec les éléments linéaires ou quadratiques, nous nous sommes intéressés à connaître le maillage qu'il faut réaliser pour obtenir une précision donnée (h-convergence). Dans le cas de la TMM, nous nous sommes fixés des maillages assez réduits (3, 5 et 12 éléments) puis nous avons cherché l'ordre nécessaire pour obtenir la même précision que précédemment. Ce **Tableau 3** nous donne le nombre de degrés de liberté du problème global nécessaires pour obtenir une précision donnée ($10^{-2}, 10^{-4},$ et 10^{-6}) avec les éléments finis classiques de degré 1 et 2 et les éléments construits par la TMM. Ce **Tableau 3** montre également qu'on peut obtenir une précision de 10^{-6} avec 3 éléments et $p = 14$ ou 5 éléments et $p = 13$, alors qu'il faut des centaines de degrés de liberté avec la méthode classique.

Tableau 3 : Comparaison TMM et méthode classique des éléments finis (MEF)

	Erreur $\leq 10^{-2}$	Erreur $\leq 10^{-4}$	Erreur $\leq 10^{-6}$
MEF linéaire	23	250	1700
MEF quadratique	9	47	101
TMM	2 (ordre 8)	2 (ordre 12)	2 (ordre 14)
	4 (ordre 7)	4 (ordre 10)	4 (ordre 13)
	11 (ordre 5)	11 (ordre 8)	11 (ordre 11)

3-3. Contrôle de l'erreur de discrétisation

Pour contrôler l'erreur due à la discrétisation, il est important d'avoir un indicateur d'erreur. Le résidu de l'**Equation** différentielle (1) est un candidat naturel pour définir un tel indicateur. On pose alors :

$$r(x) = -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x)u(x) - g(x) \tag{14}$$

$r(x)$ est le résidu de l'**Equation** différentielle (1).

La **Figure 6** montre l'évolution du résidu à l'intérieur d'un élément dans le cas : $L = 3, f(x) = g(x) = 1$ et 3 éléments aux ordres 4 et 8. D'après cette **Figure 6**, on remarque que lorsqu'on se rapproche du centre $x = x_c^e$ de l'élément, le résidu décroît et présente un gradient important en ce point.

Cette **Figure** nous montre surtout que le résidu décroît avec l'ordre p de troncature des séries. La courbe $p = 8$ est très en dessous de la courbe $p = 4$. On peut dire que le résidu est un bon indicateur de l'erreur de discrétisation. Pour confirmer cette hypothèse, nous représentons sur la **Figure 7**, le résidu en fonction de l'erreur aux nœuds $x = x_1 = -3$ et $x = x_2 = -1$. Pour ce second nœud, nous avons évalué le résidu et l'erreur à gauche et à droite de ce dernier. La **Figure 7** montre bien la bonne corrélation entre le résidu et l'erreur. Notre hypothèse est donc confirmée. Nous pouvons considérer le résidu comme un bon indicateur pour la précision de la solution obtenue par la Taylor Meshless Method.

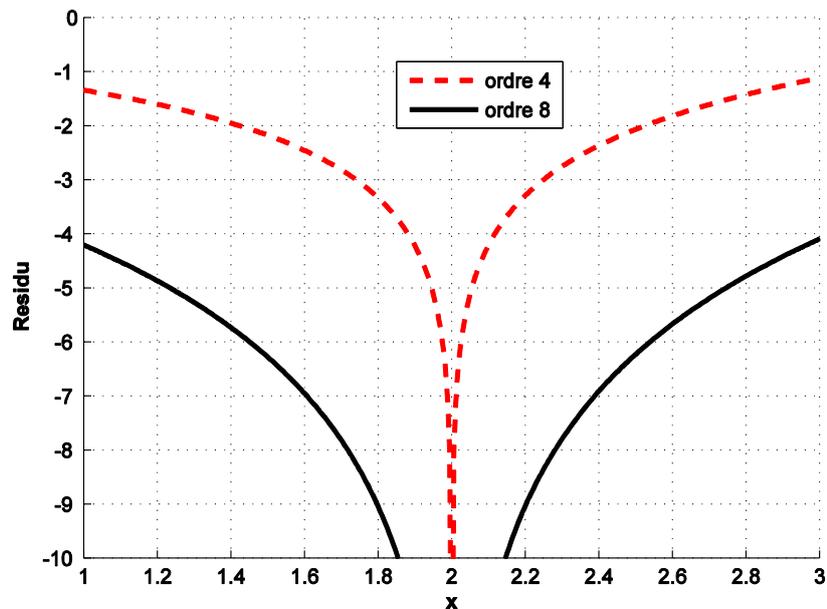


Figure 3 : Valeur du résidu à l'intérieur d'un élément. $L = 3$. Le domaine $\Omega = [-3, 3]$ est découpé en 3 éléments, ordre 4 et 8

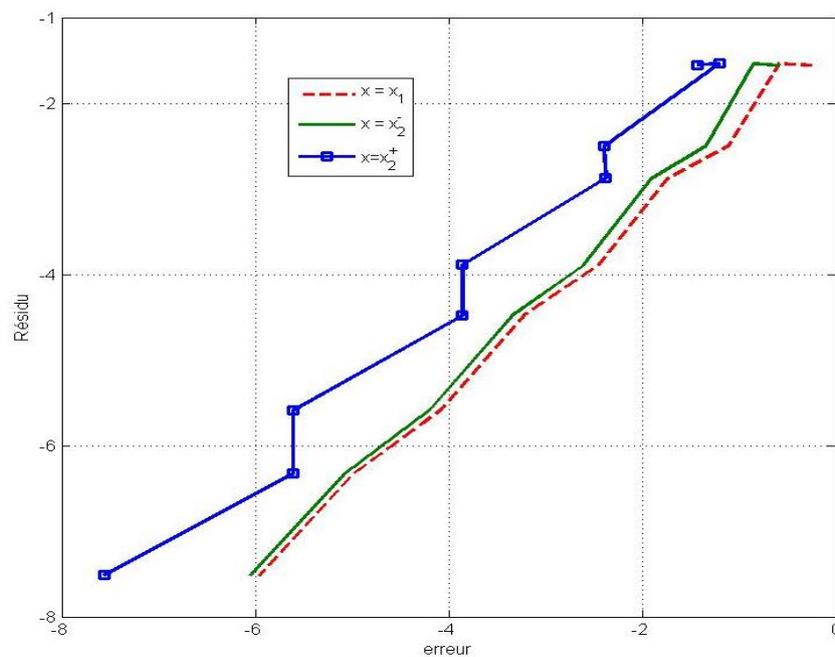


Figure 4 : Relation entre l'erreur et le résidu $x_1 = -3$ et $x_2 = -1$

3-4. Problèmes non-linéaires

Afin d'évaluer la méthode sur les problèmes non-linéaires, nous allons considérer *l'Equation (10)* avec $h(x) = x^3$ et $s(x) = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -u''(x) + u^3(x) = \lambda, & -L < x < L \\ u(\pm L) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Si $u_i(x)$ est la solution à l'itération i , le principe de la méthode de Newton consiste à chercher un incrément $\Delta u(x)$ vérifiant le **Problème (16)** suivant, linéarisé au voisinage de $u_i(x)$. La solution à l'itération $i + 1$ est $u_{i+1}(x) = u_i(x) + \Delta u(x)$.

$$-\frac{d^2[\Delta u](x)}{dx^2} + 3(u_i(x))^2 \Delta u(x) + R^i(u_i(x)) = 0 \quad (16)$$

Le **Problème (15)** a été résolu par la TMM pour différentes valeurs du paramètre λ . La **Figure 8** représente le résidu obtenu pour différents paramètres : $L = 3, \lambda = 0.1$ puis $\lambda = 3$ et $N = 3$ puis $N = 7$ en fonction de l'ordre p de troncature des séries. On retrouve les mêmes caractéristiques de la TMM appliquée au problème linéaire (1). En effet, on a une convergence du schéma avec l'ordre, une p -convergence qui s'exprime par la décroissance de chaque courbe. La convergence avec le raffinement du maillage s'exprime par les positions relatives des courbes, la courbe verte ($N = 7$ et $\lambda = 0.1$) en dessous de la courbe bleue ($N = 3$ et $\lambda = 0.1$), il est de même pour la courbe noire ($N = 7$ et $\lambda = 3$) qui est en dessous de la courbe rouge ($N = 3$ et $\lambda = 3$).

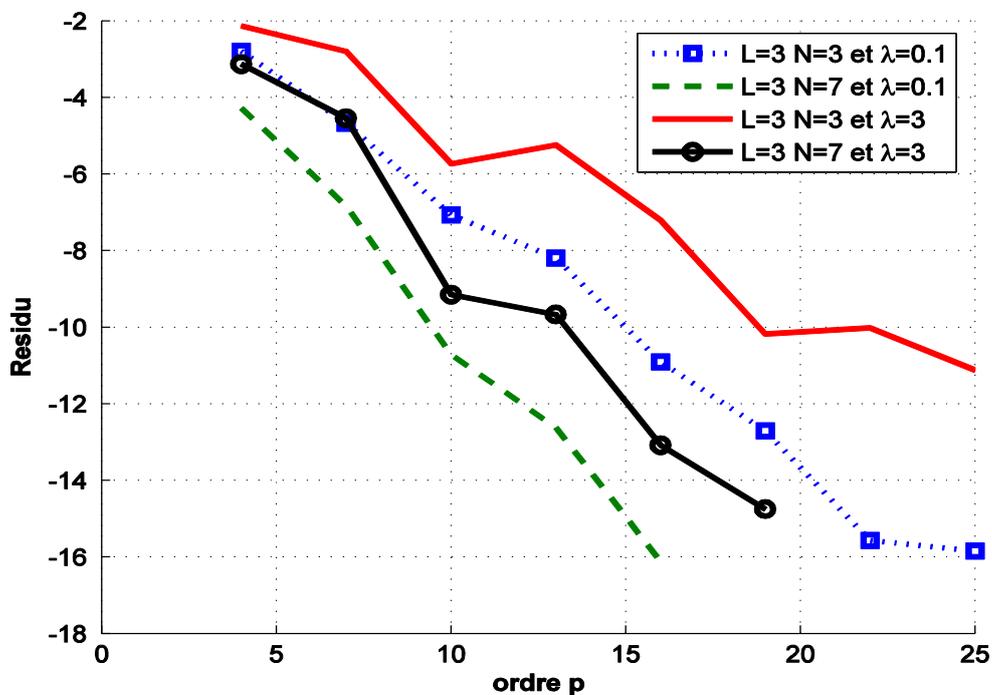


Figure 5 : Convergence de la TMM appliquée à un problème non linéaire

4. Conclusion

La Taylor Meshless Method présentée dans cet article, en dimension un a donné une solution approchée pour le problème étudié avec une très bonne précision. Bien qu'elle converge moins vite que la p-version, elle a l'avantage de nécessiter un faible coût de calcul ce qui lui permet d'être efficace. Sa précision dépend du nombre d'éléments et de l'ordre de troncature des séries dont l'augmentation influence très peu le temps de calculs. C'est ce qui permet d'utiliser des approximations d'ordre élevé en ayant un coût de calcul raisonnable. Une brève comparaison a été faite avec la méthode classique des éléments finis en terme de nombre de degrés de liberté du problème global. La TMM nécessite très peu de degré de liberté, c'est ce qui justifie son faible coût de calcul. Le problème global ne nécessite que l'inversion d'une matrice tridiagonale de taille petite, $N - 1$.

Références

- [1] - D. S. ZEZE, *Calcul de fonctions de forme de haut degré par une technique de perturbation*. PhD thesis, Université de Metz, (2009).
- [2] - D. S. ZEZE, M. POTIER-FERRY, and N. DAMIL. A boundary meshless method with shape functions computed from the pde. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34 (2010) 747-754.
- [3] - Y. TAMPANGO, M. POTIER-FERRY, Y. KOUTSAWA, and S. BELOUETTAR, Convergence analysis and detection of singularities within a boundary meshless method based on Taylor series. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36 (2012) 1465-1472.
- [4] - Y. Y. TAMPANGO, *Développement d'une méthode sans maillage utilisant les approximations de Taylor*. PhD thesis, Université Lorraine - France (2012).
- [5] - Y. TAMPANGO, M. POTIER-FERRY, Y. KOUTSAWA, and S. TIE, Coupling of polynomial approximations with application to a boundary meshless method. *International journal for numerical methods in engineering*, 95 (2013) 1094-1112.
- [6] - H. K. AKPAMA, Amélioration de la taylor meshless method et application à des structures élastiques en grandes transformations. Mémoire de MASTER, Université Lorraine (2013).
- [7] - B. SZABO and I. BABUSKA, *Finite element method*. Wiley classic library; John Wiley & sons (1991).
- [8] - S. D. CAMPION and J. L. JARVIS, An investigation of the implementation of the p-version finite element method. *Finite element in analysis and design*, 23 (1996) 1-21.
- [9] - N. HU, X. GUO, and I. N. KATZ, Bounds for eigenvalues and condition numbers in the p-version of the finite element method. *Mathematics of computation*, 67 (1998) 1423-1450.
- [10] - I. BABUSKA and B. Q. GUO, Approximation properties of the h-p version of the finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 133 (1996) 319-346.
- [11] - J. CHEN, The p-version of the finite element method for a singular perturbed boundary value problem. *Journal of Applied Mathematics and computation*, 84 (1997) 119-135.
- [12] - K. PREUSCH and O. T. BRUHNS, The p-version for hierarchic shell models based on continuum mechanics. In *WCCM V Fifth World Congress on Computational Mechanics. July 7-12, 2002, Vienna, Austria*. Eds. : H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner (2002).